ISSN 1023-7526

傳播數學知識・促進數學教育

數學傳播 季刊

中央研究院數學研究所　發行

丘成桐院士演講：
我研究數學的經驗

如何找出劣幣？

四邊形上數字的妙趣

橢圓切線交點軌跡的探討

87
民國八十七年九月
第二十二卷第三期

數學傳播季刊

稿約

本刊以傳播數學知識及促進數學教育為宗旨。讀者對象包括中學、大學和研究所師生。大凡和數學有關之專題論述、教學心得、問題研討或書評書介都在歡迎之列。

來稿

一、文字應流暢精確, 以不超過一萬五千字為原則。

二、若有特定的讀者對象 (如中學程度、大學程度等) 請在文首註明。

三、較專技性文稿請附摘要, 並儘可能列出該文所使用之關鍵字、詞。

四、翻譯稿請附原文, 註明詳細出處, 並請取得原著作所有權人同意授權。

五、請用橫向有格稿紙繕寫清楚, 歡迎提供電腦磁片。

六、圖、表請用黑墨繪製白紙上, 黏貼文稿適當位置, 並請編列號碼。

七、翻譯稿所譯專有名詞, 其不常用或初用者請附註原文。

八、來稿請註明作者姓名、地址、服務機關或就讀學校及年級, 發表時可用筆名。

九、本刊對來稿有刪改權, 未能刊登稿件恕不退還, 請作者保留底稿。

十、請寄: 台北市南港區 (11529) 中央研究院數學研究所數學傳播編輯部。

發行人: 劉豐哲
出版者: 中央研究院數學研究所
地址: 臺北市南港區研究院路二段一二八號 (電話:27851211-轉382)
編輯委員: 劉豐哲、謝聰智、黃啓瑞 杜寶生、葉永南、黃振芳
編輯: 呂素齡
出版登記: 局版北市誌字第1110號
印刷者: 永裕印刷廠
打字行: 星格瑪企業社 (電話:2620-1648)
總經銷: 學英文化事業有限公司 新店市民權路130巷6號
郵政劃撥: 0100434-8 中央研究院數學研究所
特價: 新臺幣80元 (長期訂購一年300元)
經銷處: 全省各大書局

台北: 文翔、衆文、弘雅、書香林、建宏、文源、新橋、東方、文笙、黎明、今日、南陽、曉園、聯經、再興、偉新、文林、藝殿
桃竹苗: 華竹、水木、展書堂、華通、大新
台中: 諾貝爾、文星、三民、敦煌、東興、主恩、東與、寶山、新大方、光南、紀伊國屋、黎明、中一、五南
嘉義: 諾貝爾、義豐、大人物、鴻圖、一全、立大
台南: 南台、南一、欣欣、成大圖書部、成大書城、文山、金寶、敦煌、超越
高雄: 百世、復文、開卷田、三銘、開卷、瓊林、敦煌
屏東: 百科、卓越、大中、立大

中華郵政台字第3829號第一類新聞紙

數學傳播季刊

編者的話

去年6月19日丘成桐院士應國立交通大學應用數學系之邀, 於新竹該校演講「我研究數學的經驗」。丘院士以他個人從事數學研究的經驗、強調熱忱和基本功夫的重要性。他並以王國維所講的做大學問的三個階段爲喻, 來說明做數學的三種境界。最後, 丘院士以「盡量去開發自己的領域, 題目一定要做重要的」來期勉大家。

在區間 $[a, b]$ 的任意連續函數是否可以取多項式函數來逼近它呢? 這就是著名的 Weierstrass 逼近定理。林琦焜教授在「Weierstrass 逼近定理」一文中對此定理的發展過程和相關定理有較爲詳盡的描述。

在「如何找出劣幣? ——簡介訊息與熵的概念」一文中, 蔡聰明教授以「找出劣幣」此一益智問題, 引出「機率、訊息、熵」等相關理論, 並作了最初步的淺介。

鄭毓信教授「建構主義與數學教育」一文, 先從一般角度指明了建構主義新近發展的主要特點及其教學涵義; 其次, 作者又針對數學教育的特殊性作出了進一步的論述: 建構主義不僅爲數學的本體論問題提供了合理解答, 而且也促成了數學觀的革命性變革。

蕭守仁教授在「四邊形上數字的妙趣」一文中介紹一個有趣的數字遊戲: 任給四個整數, 將它們依序放在四邊形的各邊上, 然後進行以下的運算: 將每一邊上的數與其左邊的數相減並把相減所得的差的絕對值代替左邊的數字, 這樣就完成一次運算。如此運算多次, 我們將發現四邊形上的數字都變成 0。這個遊戲的原理爲何? 如何推廣? 還有那些未解問題? 請看上文。

羅美意、蘇映竹兩位同學的「橢圓切線交點軌跡的探討」一文, 由基本觀念「橢圓任兩條切線若互相垂直, 則其交點軌跡爲一個圓」加以延伸, 探討不同情況下, 橢圓切線交點的軌跡。

數學傳播 季刊

87 第二十二卷 第三期

目錄

丘成桐院士演講: 我研究數學的經驗 …… 許正雄、林松山整理 3

Weierstrass 逼近定理 …… 林琦焜 11

如何找出劣幣?—簡介訊息與熵的概念 …… 蔡聰明 26

建構主義與數學教育 …… 鄭毓信 36

回憶潘承洞 …… 王元 50

從尤拉公式到空間的平面分割 …… 宋秉信 54

正項數列及其算數平均數列與幾何平均數列斂散性之比較 …… 張國男 61

四邊形上數字的妙趣 …… 蕭守仁 68

黃金分割的審美價值 …… 張雄 73

試算表與完全數的探究 …… 文耀光 · 江紹祥 77

橢圓切線交點軌跡的探討 …… 羅美音 · 蘇映竹 83

丘成桐院士 演講:

我研究數學的經驗

時　間：1997年6月19日
地　點：新竹交通大學應用數學系
整理人：許正雄、林松山

主持人林松山致辭:

今天我們非常高興能夠請到丘成桐院士來演講，不是講深奧的數學而是講怎麼去做深奧的數學，好的數學。這講題是「我研究數學的經驗」，是丘院士研究數學的經驗，我們歡迎丘院士。

* * * * * * *

今天林松山教授叫我講關於應用數學的問題，我想了一想，講作學問的經驗也好。因爲我來台灣也差不多五年了，我想國內很多研究人員做研究的方法並不見得是最好的，但是派出去的很多年輕人在國外卻十分出色，爲什麼呢？這是很值得思考的。所以，我想講講我自己的經驗，讓大家參考一下。

我想首要的當然是要有熱忱，我們在整個做學問的路上要披荊斬棘，假如沒有熱忱的話，就沒有辦法成就一個大學問。前幾天看我父親的遺作，其中有

屈原：路曼曼其修遠兮，
　　　吾將上下而求索。

做學問的路很長很遠，我們要上下求索，盡量去求眞和美，能否堅持下去是成功的一個重要因素。

舉個例子，在一些有名的研究所，競爭很厲害，尤其在物理或者其它實驗科學方面的研究，眞是分秒必爭；一個題目剛開始成熟，大家知道其他人也會做這個問題，很多博士後或教授往往聚在一起工作到深夜，甚至

整個晚上不睡覺。這當然有競爭的因素, 希望達到一個目標, 比人家快一點; 可是另一方面也是因爲求眞的熱忱很大, 激勵著我們, 不肯放鬆。否則的話, 很多有終身職的教授, 沒有必要這樣拼命, 可是很多人還是願意這樣幹, 熱忱是很重要的推動力量。

我們要曉得, 作研究的路是很遠的, 一定要在低潮時還能堅持下去。很多人覺得若不在一流的學術中心, 就不能做深奥的研究。有些人到了最好的地方, 卻不敢去碰重要的題目。這有很多不同的原因, 等一下我們再慢慢談, 其中最要緊的我想是基本的功夫沒有做好。

我們所做的命題, 最後的時候可能留下很簡單漂亮的結果, 但是中間往往要花大量的計算我們才曉得這結果是怎麼得到的。做好的研究不是一朝一夕得來的, 往往做了一百次, 九十九次是錯的, 最後一次才成功。但成功以後, 作者只跟你講成功的結果, 不會跟你講九十九次失敗的經驗。錯誤的經驗往往是很好笑的, 我們經常犯很明顯的錯誤, 快做完的時候才知道。可是發表結果的時候很少會提起錯誤的那部份, 其實犯錯誤的結果會讓你眼睛明亮, 幫助你看清楚前面的路。

能夠做不對的結果, 已經是很不錯了, 因爲很多初學的人連怎麼開始做這個題目都搞不清楚。譬如來講; 你給我一個化學上的問題, 我連從什麼地方著手都不知道, 因爲我沒有做化學的基本功夫, 我根本不曉得要從什麼地方開始。

一個好的數學家至少要能夠掌握兩門以上的基本功夫。基本功夫不是一朝一夕學來的。譬如講; 有代數的、有分析的、有幾何的等種種不同的方法, 我們在中學的時候就開始學。有些人喜歡幾何, 覺得代數沒有什麼意思不想學, 或者是學代數的人不想學幾何, 各種想法都有, 可是最後我們發現眞的做研究時全部工具都要用上。

有人說我只做一個特殊的題目就永遠只去做這方面的研究, 結果連這方面的問題也不見得做得好。因爲數學的發展不斷地在改變。自然界提供給我們的問題, 不會因爲你是幾何學家就單純地只提供幾何方面的問題, 幾何與其他領域的學問往往結合在一起。到了做題目的時候, 要用到其他工具, 沒有辦法去了解, 就比其他人吃虧了。

例如, 數學中很重要的一門「群表示論」, 很多地方不教這門課, 可是在應用科學或者理論科學要用到,「群表示論」在物理也要用到。有些好的數學家可以很技巧地運用「群表示論」分析很多問題。我們可能沒有這些技巧, 是因爲我們基本功夫沒有做好的緣故。「群表示論」大概是進了研究院或者大學後半期的時候學的。中國數學家在這方面的訓練不夠, 因此不如國外學者, 可見有些基本學科一定要學好, 同時要很早就學。

我們做數學的不單要學數學的基本功夫, 物理上的基本功夫也要學, 同時在大學時就要學。對力學、電磁學我們都要有某種程度的了解, 因爲物理跟數學這十多年來的發展越來越接近 , 很多問題是物理學提供的。假如對這些基本觀念完全不懂得的話, 我們看到這些題目時就比不上其他懂得這方面的數學家, 他們能夠很快的融會貫通。在這個

年代, 很多數學問題往往是從其它的學問如理論物理、應用數學或其它的科學裡來的, 這些學科甚至提供靈感和方法。我們想了很久的一些問題, 往往因此得到解決, 假使我們從來都不接觸其他科學的話, 就完全落伍了。

舉個例子來講, 代數幾何學家這二十多年來已有長遠的發展。可是這幾年來, 有一些困難的問題用古典的方法或者纖維叢的方法都沒有辦法解決, 結果理論物理學家幫助他們看到解決這些問題的可能路線。由於本身知識的局限, 很多代數幾何學家沒有辦法去接受這些專家的看法。可是物理學家畢竟提供了解決這些問題的方向, 他們又覺得很難爲情, 因爲他們沒有辦法去了解這種新的方法, 所以這是一個很困擾的問題。假使你不肯學物理學上的基本功夫, 你就很難接受這個新的挑戰。記得我看過一本書, 序言裡面講作者很感謝代數學家 Albert, 爲什麼呢? 他說, Albert教我代數, 使我面對代數問題的時候不會恐慌, 能夠坐下來好好的對付它。基本功夫的成熟在於看問題時, 可不可以坐下來就能夠想辦法來對付它。我們往往看到問題時一下子就慌得不曉得怎麼辦, 因此就放棄了好的題目, 我想大家都有這個經驗。往往因爲基本功夫沒練好, 當一個深入的題目或理論出現的時候, 我們就拒絕去接受, 甚至認爲這些題目不重要, 這是去解釋自己爲什麼不能夠去做某一個問題時最容易的方法, 結果當然是一無所得了。

訓練基本功夫一定要早, 甚至中學時代開始。基本功夫怎樣學好呢? 看書當然很重要, 但是看書看完了就放在一邊, 看了兩、三本書後就以爲懂了, 這是不夠的, 其實最重要的是去做習題, 因爲只有在做習題時你才能曉得什麼命題你不懂, 也理解到前人遇到的困難在那裡。習題不單在課本裡找, 在上課和聽討論班時也可以找。我們很多學生上課的時候不願意去寫筆記, 不做筆記的話根本不可能去唸任何學科。因爲一般來說演講的題目是根本不在書本的, 或者是還沒有發表的。我常覺得很奇怪, 爲什麼學生不去作筆記, 他認爲他懂了, 其實明明不懂。因爲可能連講課的人自己都還沒搞懂, 可是聽講的人不願意去作筆記, 不去跟演講者交談, 也不去跟其他老師討論。往往聽完以後就全部忘掉了。沒有筆記可供參考, 怎麼可能不忘掉呢? 另一個訓練基本功的方法就是要找出自己最不行的地方在那裡。我們看「群表示論」的時候, 有一大套理論。單看理論是不夠的, 在應用時往往要知道群表示是怎麼分解, 你不能夠將它分解清楚, 則理論對你一點好處都沒有。又例如一個方程式的估值問題, 能不能瞭解其中的方法, 就全靠實際計算經驗, 不是光唸一兩本書就足夠的。舉例來說, 我的兒子最近剛學因式分解, 老師教他一大堆怎麼分解整數方程的問題。他學了, 也學得很好, 同時也學了找根的方法。可是有一次考試時他不知道怎麼做因式分解, 我跟他說, 你明明曉得怎麼找根, 爲什麼不能夠做因式分解? 原來他學的時候沒有想到找根跟因式分解是同一件事情。所以在訓練基本功夫的時候, 要去想清楚數學命題間的關係, 了解清楚爲什麼要解這些命題。

我們去看很多人寫前人的事, 寫了很多很漂亮的介紹和深入的批評。可是你自己沒有經歷過這一條路的話, 事實上很難了解困難在什麼地方, 爲什麼人家會這樣子想。要得到這個經驗, 不單要做習題, 還要做比較困難的習題。

做困難的習題有什麼好處呢? 困難的習題往往是幾個比較基本的問題的組合。我自己看書的時候, 常常會一下子就看完了一本書, 覺得很高興, 因爲看完了; 可是重新再看, 反而什麼都不懂。我想大家都會有這個經驗, 主要的原因是什麼呢? 我們沒有學好這個學科, 做比較困難的題目的時候, 你就發覺會遇到困難。尤其是我們做書中習題的時候, 往往覺得似是而非, 在腦子裡面想, 以爲已經懂了、可以解決了、就一廂情願地以爲解決了, 這樣就很快地看完那一本書, 事實上這是欺騙自己, 也不是訓練基本功夫的方法。一個好的題目, 你應當坐下來用筆寫下來, 一步一步地想, 結果你會發現很多基本的步驟你根本沒有弄清楚。當你弄清楚的時候, 你去看你以前需要的定理在那裡、怎麼證的、我想你會慢慢了解整個學問的精義在那裡。

所以說, 動筆去做習題是很重要的, 我們做大學生的時候還願意做這個事, 往往做研究生的時候, 自以爲了不起, 畢業以後更不用講, 以爲自己都懂了, 事實上似是而非。所以我們一定要動手去做, 當你在一門課裡面, 基本功夫搞得很清楚同時開始動筆計算以後, 你就發現書裡面很多是錯的。在能發現書本裡的錯誤時, 你的基本功夫也不錯了。有課外書往往可以幫忙糾正書本的錯誤, 我們這個時代的學生不看課外書, 連本身的教科書也不看, 很使人失望。

做研究時, 自己要去找自己的思路。我做大學生第一年的什候, 開始將數學整體去看, 同時一點一點地推導, 有些幾何或分析上的問題, 我覺得可以慢慢將它連起來就覺得很高興。

我講這個事情是什麼原因呢? 我覺得現在很多大學生和研究生對於宏觀的數學看法並不熱情。能夠做完課本上的 題目, 就覺得很滿足。沒有整體的去想數學, 無論幾何或者代數, 我們需要知道研究的是什麼事情? 追求的是什麼對象? 去考慮這些事情其實並不會花你太多時間, 可是整體性的想法一定需要成熟的基本工夫才能形成。就算很瑣碎的事情你都要有相當的認識, 才能對整個科學有一個基本的看法、一個大範圍的看法。

現在談談我個人的經驗, 記得唸中學的時候我學了平面幾何。大家都曉得平面幾何很漂亮, 我也覺得很有意思。書本上的平面幾何問題大概我都懂得怎麼做。可是我覺得還是不太夠, 所以我將很多基本的問題連在一起, 之後開始慢慢想。去發現一些書本沒有的問題, 去想書本的方法能夠有什麼用處, 是不是大部份平面幾何上的問題都可以用這些方法去解決? 其中有一個問題我發覺沒有辦法去解決, 花了很多功夫去想, 參考了很多課外書, 最後很高興找到一本書講那個問題不可能用圓規和直尺來解決, 書上用代數的方法來解釋這個命題。因爲試過很多不同的想法, 完全不曉得圓規和直尺有時解決不

了平面幾何上的問題, 因此看到人家將這個問題解釋清楚, 就覺得很滿意; 那時候是中學生, 沒有了解 Galois 理論, 所以還是搞不太清楚是怎樣證明的, 可是至少曉得有些問題是不能用圓規和直尺去解決的; 也因爲經過很長的思考, 所以對幾何學清楚很多, 也開始欣賞到做數學的精義。我想我們做一個習題或研究, 最好花些功夫去想想整個問題的來龍去脈, 也多看一些參考書, 這樣幫助很大。因爲數學無非是很多方法放在一起來解決很多不同的問題。當我們了解到整個方法的局限, 基本功夫也做得很好了。基本功夫沒搞清楚的話, 沒有條件去講某人學問好, 某人學問不好。

從前在香港唸大學的時候, 環境比現在差得多, 圖書館根本沒有什麼書, 也沒有什麼很好的導師, 但還是看了些課外書, 也看了不少文章。但現在回想起來浪費了很多精力, 這是因爲眼界太淺、坐井觀天, 不知數學的發展方向的緣故。以後到了 Berkeley, 也看了很多文章, 得益良多。一方面當地圖書館收藏豐富, 一方面良師益友的交往, 心中開始建立對數學的看法, 知道什麼是好的數學, 什麼是好的文章。中學的時候, 老師跟我們講: 好的書要看, 不好的書也要看。因此不好的書我也看, 你可能覺得奇怪; 我覺得一定要辨別什麼是好的書, 什麼是不好的書。在看文章的時候, 一定要搞清楚有些作者寫的文章是一般的, 有些作者的著作是了不起的, 從不好的文章裡面, 你也可以看到許多現代的發展。因爲有時候, 從簡單的寫法裡面, 反而比較容易入手, 可是你一定要曉得它的命題並不見得是有意思的, 一定要經過自己大腦仔細去想。它裡面的組織往往是有的, 普通水平的文章裡面, 往往會引用有名的文章, 介紹裡面的內容, 同時往往會寫得比較容易一點。你看了以後, 要曉得怎樣和好的文章比較。這是我自己的經驗, 你不一定要這樣子做。我的建議是大部份的時間看大數學家的作品, 小部份時間瀏覽一般作品, 並做比較。

我當研究生的時候, 有時候從早到晚都在圖書館看期刊、看書。當時 Berkeley 沒有研究室, 研究生沒有研究室很好, 整天在圖書館裡面坐。幾乎主要期刊的文章我都看過, 這並不表示仔細的看, 但至少主要的定理都看過。當時大部份定理看不懂, 看不懂沒有什麼關係。往往要花很多功夫才能夠在細節的部份搞清楚一篇好的文章。因此第一眼就看得懂的文章, 一般來說不見得太好。(並不是講一定不好, 簡單的文章有時也有創見。) 多看文章讓你曉得當時的人對於某一個方向的問題重視, 對你幫助很大。

很多學生跑來問我問題, 我跟他講某某年有誰做過、做到什麼階段, 他們聽了很驚訝, 爲什麼我曉得? 其實誰都沒有跟我講, 大部份是我在文章上看的。做研究的時候, 需要曉得的是誰做過、在什麼地方可以找到這方面的文獻。有了這個幫助以後, 就可以跑去圖書館找這個文件。甚至你只要曉得那一個年代誰碰過這個問題, 也有很大的好處。

你有追求的熱情又培養好基本工夫以後, 應當將不同的看法融會貫通。到了這一步以後, 你可以開始找自己的題目。因爲你

開始曉得整個數學界在追求什麼目標, 想解決什麼問題。

一個數學家怎麼找自己的問題是很重要的。當然有不同的找法, 有些人要發展一套理論, 有些人要解決難題。理論的目標最後還是要解決問題的, 所以解決重要問題是發展一般理論中很重要的一環。舉例來說, 像 Poincaré conjecture, 它是三維拓樸中最主要的猜想, 我們曉得前人花了很多心血去解決它, 到了現在有很多不同的嘗試方法, 各自成一氣候。這個命題已經變成一門學科而不再是一個孤立的問題。當這個猜想徹底解決後, 三維空間的結構了解才算圓滿。另一方面有些人爲什麼只對 Poincaré Conjecture 有興趣, 對其他問題興趣不大, 那是因爲它是公認的難題。我想選題方面每個人有不同的看法。我有很多朋友是很出名的數學家, 他們一輩子只想解決出名的問題, 我認爲這種選題方法是錯誤的。在數學上, 我們應該有整個系統的想法, 想整個數學的目的在那裡、應當解決什麼問題。

你們或許唸過王國維講的做大學問的三個階段, 第一個階段是晏殊說的

昨夜西風凋碧樹,
獨上高樓, 望盡天涯路。

要解釋這一段話, 我要再說明基本功夫的重要性。如果基本功夫沒有做好, 你根本望不遠。你叫中學生去望盡天涯路, 根本是不可能的事, 最後只能講一些空談的話。對數學或者科學的歷史不了解的話, 你根本沒有資格去談以後的事。

現在很多學生, 尤其是研究生, 我覺得很頭痛, 叫他做一個小題目, 做了以後, 一輩子不願意放。不停的寫小文章, 寫了文章當然可以發表, 對某些年輕人來講, 他認爲這樣子很好, 不用想重要的問題。今天能夠寫一篇小文章, 明天能夠寫一篇小文章, 就可以升等。假如寫不出來的話, 生活上會受到困擾。這都是對的, 可是眞的要做一個好的題目, 其實也不見得那麼難。一些研究生的論文是歷史上有名的著作。爲什麼他們能夠花三、四年的工夫, 做出這麼出色的工作? 他們是從不懂到懂, 然後還要再向前進。這表示要做好的題目, 並不是像你想像要花很多很多的時間才能夠做到, 問題是你的決心夠不夠。昨夜西風凋碧樹, 就是說你要望很遠的話, 要將前面小的樹去掉, 才能看得遠。假如我們眼界裡面的都是小題目, 永遠都看不遠。我們要懂得怎麼放棄些渣滓, 才能夠做一些好的題目, 這是一個很重要的決定。你不願意放棄你明明曉得不會有前途的問題, 就永遠做不到好的問題。這是一個很困難的選擇, 因爲畢業和升等是很困擾的問題, 你不願放棄沒有前途的小問題, 那你永遠不會成就大學問。

我記得我剛學幾何時, 當時流行度量幾何, 所有工具都是用三角比較定理得來的, 我始終覺得這對幾何的刻劃不夠深刻。後來我和我的朋友和學生開始一系列用微分方程作爲工具的幾何研究, 得到不少結果。我很慶幸當時願意放棄一些小的成果, 走一條自己的路。

我們選題的時候, 可以跟出名的數學家、跟導師討論或者是從書本上得到啓發,

可是最後的思考一定要有自己的想法才能成就大學問。假如沒有自己的想法，則始終跟著人家走、是沒有辦法做好學問的。所以要獨上高樓，去找自己認爲重要的研究方向，去開創自己的路線。

王國維在談學問的第二階段引用了柳永的詞:

衣帶漸寬終不悔，
為伊消得人憔悴。

尋找眞理的熱情就如年輕的戀人對自己對象的追慕，那是很重要的事。在追求一個好的命題的時候，中間要花很多功夫，有時候甚至是很痛苦的。可是我們只要相信，最後的成果是值得的，我們就會花很多功夫去做，就像愛情一樣。很多年輕人找對象時，朝思暮想，但做學問時卻沒有這種態度。假如做學問沒有熱情沒有持久力的話，就不可能做成大學問。屈原說「亦余心之所善兮，雖九死其猶未悔」比柳永更來得徹底。接著下來大家都曉得王國維的第三階段是

眾裡尋他千百度，
驀然回首，那人卻在，
燈火闌珊處。

這是辛棄疾的詞，基本上我們都有這種感覺。凡作過文章的人就有這種經驗。我們花很多功夫做一個好的命題，新思緒來臨時，每每徹夜難眠。有時候想得辛苦了，就一睡睡很久。假如你做學問做到這個地步，你會解決很多意想不到的問題。

我們做學問跟愛情不太一樣，有時候不一定看到原來既定的目標，而是看到其它有趣的問題。就像我剛才講的，我們要解決 Poincaré conjecture，最後還沒解決它，可是往往解決了其它命題，這是數學史上常常有的。這是因爲我們做這個題目的時候，不曉得走法對不對；可是你將這個工具全部搞好，基本的想法、有意思的想法都懂得以後，就可以解決很多問題了。在路上走的時候，思想不要太頑固。你要知道還有其它有意思的問題。發展了一套的想法以後，往往恰好可以解決這些問題。

因此，在整個做研究的過程裡面，眼睛要睜開。眼睛怎麼睜開呢？很多學生不願意去聽 colloquium，也不願意去聽其它人的 seminar。不聽 seminar 就不曉得人家在做什麼東西。明明你的方法可以解決他們在做的問題，但你眼睛閉起來、看不到，這是一個很大的困難。很多學生尤其是中國學生，講我的論文是做這個，這個 seminar 與我的論文無關，我不願意去聽、不願意去看、不願意去跟人家來往、不願意去跟人家交談。結果本來你的論文明明可以做得比人家好，你卻讓這個機會溜掉，可能你的方法剛好可以解決人家的問題。因爲你不願意去聽、去看，你就錯過了這個機會。

一個人的思維、能力有限，不可能不靠人家的幫忙。什麼是人家的幫忙呢？一方面是看文章，聽 seminar，一方面就是請教名家。你自己去請教別人的時候，百分之九十五的情形下，別人不曉得你在做什麼，也不可能提供直接的意見。(假如能夠直接提供意見，幫你直接解決問題的話，你這個問題不見得是很重要的問題。) 但不要緊，多請教別

人總有好處, 至少曉得這個問題有多好, 還是不好。假如你怕發問, 就在 seminar 或 colloquium 的時候多聽, 就算聽不懂講者的話, 也看他寫的頭幾個字, 大致上會知道他在做什麼題目。至於比較複雜的內容, 你可能覺得莫名其妙, 可是你還是可以發現得到不少好處。所以能夠盡量去聽不同的課, 對你是有很大好處的; 唸純數學的也應當去聽應用數學或物理方面的課。聽 seminar 時, 即使不懂也沒有什麼損失, 反正總比在家裡無聊看電視好。

怎樣在孤立的地方, 也能夠做好的學問? 舉個例子來講, 十四年前, 復旦大學有一位學生, 他要來跟我, 我答應了。結果因爲當時復旦大學的校長怕留學生全部走掉了, 所以不准他出國, 因此他沒有辦法來跟我。但是他將我在80 年代寫的問題集, 在大概一百題中, 選了一個題目去做, 拚命的在做。我不曉得他在做這一個題目, 雖然他在一個比較孤立的地方, 可是十多年堅持下來, 去年終於做出很重要的結果。我覺得很高興, 因爲這是一個很不簡單的問題。可見找對了題目, 同時拼命的花功夫去作, 就算不跟人家來往, 也不見得做不出成績來。當然我不知道他是不是完全不跟人家來往, 因爲復旦大學裡面也有一些很不錯的數學家。交大、清華不能講是孤立的地方。在這個條件下, 我覺得絕對是可以做好學問的地方。

今天講的是我唸書的經驗, 希望你能夠參考。不見得每一個人都同意, 每一個數學家都有對學問不同的看法, 你可以追隨不同的路線。可是最開始所講基本功夫要做好這一點, 總是少不掉的。然後要盡量去開發自己的領域, 題目一定要做重要的。即使後來得到的是比較小的結果, 總比一開始只想做不重要的題目來得好。到了解決主要的問題以後, 你對整個學問的看法會有所不同。今天就講到這裡, 謝謝大家。

Weierstrass 逼近定理

“暫時的沒落, 不是永遠的埋沒。”

謹以此文紀念 Karl Weierstrass (1815-1897) 逝世一百週年

林琦焜

1、近代分析之父—Karl Weierstrass :

“英雄出少年”這似乎是數學史甚至是整個科學史的普遍定律, 從牛頓、Euler、Lagrange、Laplace、高斯 ··· 等這些大數學家, 在很年輕的時候便已展露其才華。對於這些天才, 我們除了讚嘆之外, 坦白而言他們離我們這些凡夫俗子是太遙遠了。如果要像這些人的成就才算偉大的話, 那麼我們沒有幾個人的生命是有價值有意義, 更遑論我們所作一點點的數學工作。

在數學史上出現 Karl Weierstrass, 讓我們感到非常的欣慰, 因爲一個人的成功不見得是牛頓或高斯的方式, 也可以是 Weierstrass 的方式。

Karl Weierstrass 1815年生於德國的 Ostenfelde, 大學時代學的是法律與財經, 後來改讀數學但沒有拿到博士學位。在四十歲以前都還在中學教書, 後來由於所發表的文章關於 Abel 函數理論, 才受到大學的注目, 他在普魯士高等學校任教多年之後, 才在1856年成爲柏林大學數學系教授, 一直到去世。

正如古希臘哲學家入門的教訓 “認識你自己”, 一個人只有在正確認識自己之後, 才有可能獲得成功。我相信 Weierstrass 是認識他自己, 不像高斯、Cauchy、Riemann 等數學家那麼天才橫溢有快速的直覺, Weierstrass 對數學的研究注重方法處事嚴謹。Weierstrass 的名聲主要是基於他極端細心的推論方法, 人們稱之爲 “Weierstrass 的嚴格”。

Weierstrass 早期的工作是關於超橢圓積分 (hyperelliptic integrals)、Abel 函數與代數微分方程。但他最廣爲人知的則是

利用冪級數 (power series) 來建構複變函數理論, 而其中他最有興趣的部份則是整函數 (entire function) 與函數的無窮乘積。均勻收斂 (uniform convergence) 是他發現的、平面上的解析函數稱爲整函數就是他取名的、線性代數的行列式 (determinant) 是他首次以矩陣之元素所形成的齊次多項式來定義。另外他對於雙線性型式 (bilinear form) 與二次型 (quadratic form) 也有著不可抹滅的貢獻。對二十世紀的數學而言, 他和他的學派所引介的"分析算術化"(arithmetization of analysis) 無疑是最重要的。

他從不諱言曾經在中學教過書。由於這樣的經驗, 就算是在大學教書也是一位好老師, 他的講義都是經過細心準備, 所以享有極高的聲譽, 而他的觀念主要是通過這些講義而成爲數學家共有的財富。分析中 ϵ-δ 的觀念是他所提出的。由於他作學問的才華和教書的本事吸引了很多學生到柏林來, 這些弟子中最出名的有 H. A. Schwarz(1843-1921)、Sofya Kovalevskaya (1850-1891)、G. Cantor (1845-1918)、Mittag–Leffler (1846-1927), 還有 D. Hilbert(1862-1943) —— 本世紀最偉大的數學家之一。其中最令人稱道的是, 在他那個時代破例收 Sofya Kovalevskaya 或 (Sophie Kowalevski) 爲學生 (由於柏林大學拒收女性, Sofya 無法入學且進入課堂聽講), 他自己每星期日下午撥出一段時間在家裡特別指導她學習數學, 最後並推薦她獲得德國哥庭根大學的博士學位 (Sofya Kovalevskaya 是哥庭根大學有史以來第二個女博士)。Weierstrass大概是數學史上高等數學最偉大的教師吧!

Weierstrass 對於連續函數的研究有絕對性的影響。其中之一就是他造了第一個*處處連續處處不可微分的函數*, 由於這個結果使得前面諸多對連續函數的誤解得以釐清。另外則是這篇文章所要探討的— Weierstrass 逼近定理: *任意定義在實數軸上之閉區間的連續函數都都可藉由絕對且均勻收斂的多項式表示之*。這個定理 Weierstrass 在中學教書時就發現。可見環境並不是作研究的唯一決定因素, 個人的毅力與執著才是更重要的動力。

回顧一下; 在高等微積分關於一致收斂或均勻收斂 (uniformly convergent) 有一個很重要的定理: *若有一序列均勻收斂的連續函數, 則其極限必定是連續函數*。換句話說連續函數在均勻收斂下有完備性。通常我們最有把握也最有興趣的是多項式函數, 因此上面這段敘述可換爲: *若有一序列均勻收斂的多項式函數, 則其極限一定是連續函數*。由此自然而然可以問其逆敘述是否成立呢? 換句話說, 在區間 $[a,b]$ 的任意連續函數是否可以取多項式函數來逼近它呢? 這就是著名的Weierstrass 逼近定理 (*Weierstrass approximation theorem*)。

Weierstrass 逼近定理一: 任意定義在有界閉區間 $[a,b]$ 的連續函數 f, 總是可以用多項式 P_n 來逼近而且兩者之誤差

$$E_n(f)=\max_{a\le x\le b}|f(x)-P_n(x)|=||f-P_n||_\infty$$

當 $n\to\infty$ 時趨近於零。

這就是 Weierstrass 在上個世紀末證明的定理。其重要性在於保證任意的連續函數都可以用多項式來逼近, 而且可以達到任意要求的精度。這個結果對函數的近似理論有很大的幫助, 同時也說明了爲何多項式可以形成通用的近似函數之理由。

除了代數多項式之外, 另一近似函數的形式是三角函數, 或者更正確地說; 用 “Fourier 級數” 來逼近連續函數, 這也是 Weierstrass 的貢獻。

Weierstrass 逼近定理二: 任意定義在 $[-\pi,\pi]$ 且週期等於 2π 的週期連續函數 f 永遠可以找到三角多項式

$$S_n = a_0 + (a_1\cos x + b_1\sin x) + \cdots + (a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

使得兩者的誤差 $||f - S_n||$ 是任意小。

這個定理可視爲定理一的系 (corollary), 原因是我們可以利用三角變換將 S_n 轉換爲 $\cos x$ 與 $\sin x$ 的多項式。Weierstrass逼近定理的直接應用首先就是函數的近似理論 (approximation theory)。這個定理對函數論而言是個不可或缺的工具。在複數域也有類似的定理。1937 年 M. H. Stone 爲了解決拓樸空間中之連續實值函數中某些 代數性質之問題, 發現 Weierstrass 逼近定理之一般化, 今天我們稱爲 Stone–Weierstrass定理, 應用此定理使得一些重要的古典定理之證明變得簡單。對於 Stone–Weierstrass 定理有興趣的讀者可參閱實變函數論 與泛函分析的書, 或者直接看 Stone 的文章 (請參考 [2]、[7]) 。

這文章是作者探索數學中之某一主題時經驗的記錄與讀書心得, 這是一次令人興奮之旅而我希望能把它寫得明簡, 同時也希望透過 Weierstrass 的簡介, 能再次激勵我們學習數學的心志。

『數學是打開科學大門的鑰匙, ⋯ , 輕視數學必將造成對一切知識的損害, 因爲輕視數學的人不可能掌握其它科學和理解宇宙萬物。』 — Roger Bacon —

2、Bernstein 的方法 :

Bernstein(1912) 的證明方法是建構性的 (constructive): 直接造一個多項式來逼近連續函數, 這個多項式我們現在稱爲 Bernstein 多項式。

2.1 Bernstein 多項式

2.1 定義: 任意連續函數 $f \in C[0,1]$, 其對應的 Berstein 多項式如下:

$$B_n(x;f) \equiv \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} \tag{2.1}$$

這個多項式當然不會憑空想像就出現 (靈感?) 數學最重要的是思維的方法, 如果你要等待“靈感”, 那麼你就永遠播不了種也無法收割, 無緣享受知識的樂趣, 明白這當中的奧妙。Bernstein 多項式的起源就是二項式定理:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k} \tag{2.2}$$

上式對 x 微分後乘 $\frac{x}{n}$ 得

$$x(x+y)^{n-1}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{k}{n}x^k y^{n-k} \tag{2.3}$$

再重複前面 (2.3) 的計算過程可得

$$\begin{aligned} &x^2(x+y)^{n-2}+\frac{xy}{n}(x+y)^{n-2} \\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{k}{n})^2 x^k y^{n-k} \end{aligned} \tag{2.4}$$

令 $y=1-x$, 則由 (2.2)-(2.4) 可分別得連續函數 1、x、x^2 的 Bernstein 多項式

$$\begin{aligned} B_n(x;1)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=1 \\ B_n(x;x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}=x \\ B_n(x;x^2)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(\frac{k}{n})^2x^k(1-x)^{n-k} \\ &=x^2+\frac{1}{n}x(1-x) \end{aligned} \tag{2.5}$$

對於第三項作個估計:

$$\left|x^2-B_n(x;x^2)\right|=\frac{x(1-x)}{n}\leq\frac{1}{4n}\quad\forall n \tag{2.6}$$

因此當 n 很大時 $B_n(x;x^2)$ 與 x^2 是非常接近, 換句話說可用 Bernstein 多項式來逼近而這正是 Bernstein 的想法。我們看特殊的函數 $f(x)=e^x$, 則

$$\begin{aligned} B_n(x;e^x)&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{\frac{k}{n}}x^k(1-x)^{n-k} \\ &=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(e^{\frac{1}{n}}x)^k(1-x)^{n-k} \\ &=\left[e^{\frac{1}{n}}x+1-x\right]^n \\ &=\left[1+(e^{\frac{1}{n}}-1)x\right]^n\approx\left[1+\frac{x}{n}\right]^n \end{aligned}$$

我們有足夠理由相信

$$\lim_{n\to\infty}B_n(x;e^x)=\lim_{n\to\infty}(1+\frac{x}{n})^n=e^x$$

2.2 定理之證明

我們先直接相減看看:

$$\begin{aligned} &|f(x)-B_n(x;f)| \\ =&\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}f(\frac{k}{n})x^k(1-x)^{n-k}\right| \\ =&\left|\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left[f(x)-f(\frac{k}{n})\right]x^k(1-x)^{n-k}\right| \end{aligned} \tag{2.7}$$

對 (2.7) 式而言, 我們期待絕對值會趨近於 0, 乍看之下似乎 $|f(x)-f(\frac{k}{n})|$ 這項就夠了, 但這只是假象, 因爲還有另一個困難就是 (2.7) 的右式是有限項和, 這兩個困難可分別由一致有界 (uniformly bounded) 與一致連續 (uniformly continuous) 來克服。因爲$f\in C[0,1]$, 而 [0,1] 是一緊緻集, 因此 f 在 [0,1] 是有界且一致連續, 若$|f(x)|<M$, 則

$$\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|<2M,\quad x\in[0,1] \tag{2.8}$$

另外由一致連續可知 $\forall\epsilon>0$, $\exists\delta(\epsilon)\ni$

$$\left|f(x)-f(\frac{k}{n})\right|<\frac{\epsilon}{2},\quad\left|x-\frac{k}{n}\right|<\delta(\epsilon) \tag{2.9}$$

我們把 (2.7) 拆成兩部份

$$\begin{aligned} |f(x)-B_n(x;f)|\leq&\sum_{|x-\frac{k}{n}|<\delta(\epsilon)}+\sum_{|x-\frac{k}{n}|\geq\delta(\epsilon)} \\ &=S_1+S_2 \end{aligned} \tag{2.10}$$

由一致連續性 (2.9) 可得

$$S_1 < \frac{\epsilon}{2} \sum_{|x-\frac{k}{n}|<\delta(\epsilon)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$\leq \frac{\epsilon}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\epsilon}{2} \quad (2.11)$$

而利用一致有界 (2.8) 並 $|x - \frac{k}{n}| \geq \delta(\epsilon)$, 可得

$$S_2 < 2M \sum_{|x-\frac{k}{n}|\geq\delta(\epsilon)} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$
$$\leq \frac{2M}{\delta^2(\epsilon)} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x - \frac{k}{n})^2 x^k (1-x)^{n-k}$$
$$= \frac{2M}{\delta^2(\epsilon)} \left[x^2 B_n(x;1) - 2x B_n(x;x) + B_n(x;x^2)\right]$$
$$= \frac{2M}{\delta^2(\epsilon)} \left[x^2 - 2x^2 + x^2 + \frac{x(1-x)}{n}\right]$$
$$\leq \frac{2M}{4\delta^2(\epsilon) n} \quad (2.12)$$

因此只需要取 n 相當大,$n > \frac{M}{\delta^2(\epsilon)\epsilon}$, 則由 (2.11)-(2.12) 可得

$$|f(x) - B_n(x;f)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{2M}{4\delta^2(\epsilon)n} < \epsilon \quad (2.13)$$

證明完畢。

2.2 定理之意義

Weierstras 逼近定理如果從機率的角度來看是很有意思的。x爲已知, 假設由$[0,1]$這區間任意取 n 個數, 令k表示落在 $[0,x]$ 的數而 $n-k$ 是落在 $(x,1]$ 的數, 而賠率 (payoff) 爲 $f(\frac{k}{n})$, 則 k 之機率爲

$$\binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.14)$$

而期望值正是 Bernstein 多項式

$$B_n(x;f) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f(\frac{k}{n}) x^k (1-x)^{n-k} \quad (2.15)$$

或者以丟銅板爲例

x :	正面的機率
$1-x$:	負面的機率
$f(\frac{k}{n})$:	付錢數
$B_n(x;f)$:	平均所付

當 n 很大時、$k \approx nx$、因此由大數法則 (law of large number) 我們期待

$$B_n(x;f) \approx f(\frac{nx}{n}) = f(x)$$

所以我們可結論: Weierstras 逼近定理正是二項分配的大數法則。

註: Bernstein多項式雖然形式比較簡單, 意義也很清楚, 但在實際的應用上卻有極大的困難, 主要原因是收斂速度太慢, 甚至對於很好的函數, 例如可微分函數也不例外。

3、Landau 的方法:

好的定理必定伴隨不同漂亮的證明方法。Landau(1877–1938) 的證明方法不像 Bernstein 那麼直接、基本上就是 Weierstrass 的想法, 他所使用的函數以現代的語言來說就是 Dirac 序列 (Dirac sequence)。

3.1 Dirac 序列

Landau 考慮底下之函數族

$$\phi_n(x) = \begin{cases} c_n(1-x^2)^n, & -1 \le x \le 1 \\ 0, & 其它 \end{cases} \quad (3.1)$$

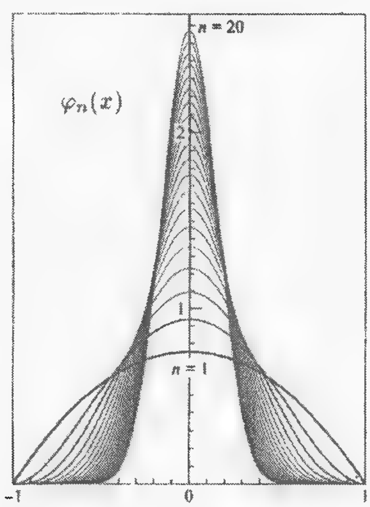
係數c_n 的選取必須滿足

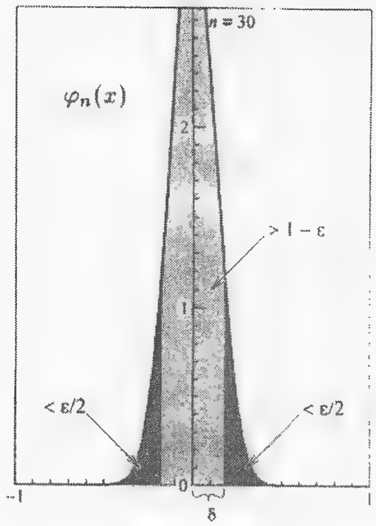
$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)dx = 1 \quad (3.2)$$

因此由分部積分或者 Beta 函數的理論可知

$$c_n = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n+1)}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 6\cdots 2n} \quad (3.3)$$

由圖形可知函數族 $\{\phi_n\}_{n=1}^{\infty}$ 有一些特性; 這些函數與 x 軸所夾的面積始終等於1, 當n越來越大的時候, 整個面積 (可視爲質量) 越往這些函數的山峰處集中好像一根釘子狀 (spike-like)。





3.1引理: $\forall\epsilon > 0$, $\forall\delta > 0$, $0 < \delta < 1$, 恆存在自然數 $N \in \mathbf{N}$ 使得 $\forall n \ge N$,ϕ_n 滿足

$$1-\epsilon < \int_{-\delta}^{\delta} \phi_n(x)dx \le 1 \quad (3.4)$$

$$\int_{-1}^{-\delta} \phi_n(x)dx + \int_{\delta}^{1} \phi_n(x)dx < \epsilon \quad (3.5)$$

證明方法要利用 Stirling 公式與這些函數的特性。我們並不打算給一個嚴謹的證明, 而寧願讀者有直觀的概念。

詳解: 3.1引理以另一形式表達爲

3.1′ 引理: $\forall\delta > 0$, $\delta \in (0,1)$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n dx}{\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx} = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\int_{0}^{\delta}(1-x^2)^n dx}{\int_{0}^{1}(1-x^2)^n dx} = 1$$

證明: 我們作個簡單的估計

$$\int_{\delta}^{1}(1-x^2)^n dx < (1-\delta^2)^n(1-\delta) < (1-\delta^2)^n$$

$$\int_0^1 (1-x^2)^n dx > \int_0^1 (1-x)^n dx = \frac{1}{n+1},$$

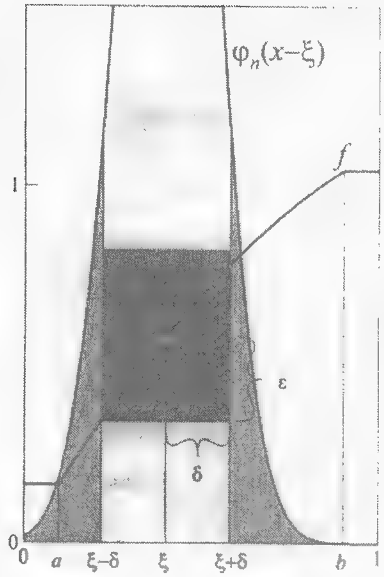
但 $\lim_{n\to\infty}(n+1)(1-\delta^2)^n = 0$ 故得證。

3.2 褶積convolution 之引進

如果作個平移考慮函數 $\phi_n(x-\xi)$, $\forall \xi \in [0,1]$, 則由 ϕ_n 之特質可知此時只是將山峰由 $x=0$ 的位置平移至 $x=\xi$。所以乘積 $f(x)\cdot\phi_n(x-\xi)$ 差不多就是 $f(\xi)$ 乘上山峰的高度再利用 (3.2) 平均一下 我們可以猜測新的函數

$$P_n(\xi) \equiv \int_0^1 f(x)\phi_n(x-\xi)dx$$
$$= c_n \int_0^1 f(x)[1-(x-\xi)^2]^n dx \quad (3.6)$$

與 $f(\xi)$ 是非常接近。這就是 Landau 的想法, 也是 Weierstrass 的想法。這兒所引進的就是褶積 (convolution) 的概念; 在數學分析中是非常重要的工具。如果將因式 $[1-(x-\xi)^2]^n$ 用二項式定理展開, 其實它是 ξ 的 $2n$ 次多項式; 所以可用多項式 $P_n(\xi)$ 來逼近連續函數 $f(\xi)$。



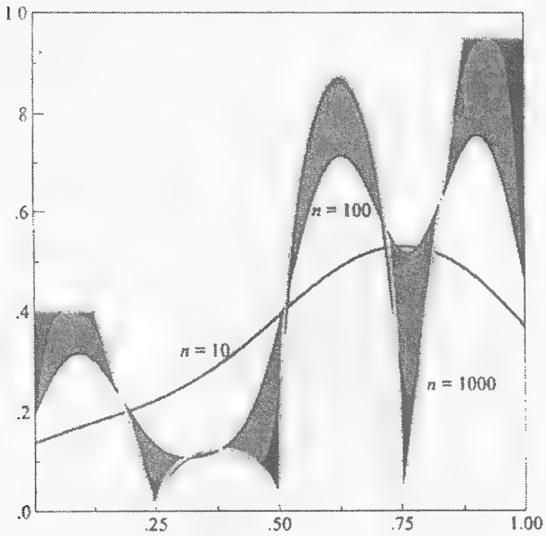
定理證明: 我們所需要的是作估計; 看 $P_n(\xi)$ 與 $f(\xi)$ 兩者間的誤差; 利用三角不等式

$$\begin{aligned}|P_n(\xi)-f(\xi)| &\le \Big|\int_0^1 f(x)\phi_n(x-\xi)dx \\ &- \int_{\xi-\delta}^{\xi-\delta} f(x)\phi_n(x-\xi)dx\Big| \\ &+\Big|\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(x)\phi_n(x-\xi)dx \\ &- \int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta} f(\xi)\phi_n(x-\xi)dx\Big| \\ &+\Big|f(\xi)\int_{\xi-\delta}^{\xi+\delta}\phi_n(x-\xi)dx - f(\xi)\Big| \quad (3.7)\end{aligned}$$

正如 Bernstein 的證明方法, 我們還是要用到一致有界與一致連續: 若$|f(x)| < M$ 則 (3.7) 右邊的第一式小於$M\epsilon$; 同理第三式也小於ϵ。至於第二式則由一致連續性可結論小於ϵ 故當n很大時,

$$|P_n(\xi)-f(\xi)| \le (2M+1)\epsilon$$

證明完畢。



褶積的意義

3.2 定義: f、g 爲 $\mathbf{R}$ 上的兩個函數則其褶積 (convolution) $f*g$ 定義爲 (如果積分存在)

$$f*g(x) \equiv \int f(x-\xi)g(\xi)d\xi \qquad (3.8)$$

利用變數變換與積分順序互換可容易得到褶積的基本代數運算:

3.3 定理: f、g、h 爲 $\mathbf{R}$ 上的三個函數則其褶積具有底下之關係:

(分配律) $f*(ag+bh)=a(f*g)+b(f*h)$

(交換律) $f*g=g*f$

(結合律) $f*(g*h)=(f*g)*h \qquad (3.9)$

關於褶積的意義可以如此看: 將 (3.8) 視爲 Riemann 和

$$\int f(x-\xi)g(\xi)d\xi \approx \sum f(x-\xi_j)g(\xi_j)\triangle\xi_j \qquad (3.10)$$

其中 $f(x-\xi_j)$ 是沿 x 軸平移 ξ_j 的量因此 (3.10) 表示所有f之平移量的線性組合(係數等於 $g(\xi_j)\triangle\xi_j$)。

褶積的另一個意義是—平均: 函數f在區間 $[a,b]$ 之平均値是

$$\bar{f}=\frac{1}{b-a}\int_a^b f(\xi)d\xi$$

如果有權函數 (weight funtion), 則

$$\bar{f}=\frac{1}{\int_a^b w(\xi)d\xi}\int_a^b f(\xi)w(\xi)d\xi$$

現在假設 $g\geq 0$ 且 $\int g(\xi)d\xi=1$ 並且刻意將 $f*g$ 視爲 $\int f(\xi)g(x-\xi)d\xi$, 因此 $f*g(x)$ 表示權函數爲 $w(\xi)=g(x-\xi)$ 的平均。例如

$$g(x)=\begin{cases}\frac{1}{2a}, & |x|<a\\ 0 & \text{其它}\end{cases}$$

則

$$f*g(x)=\frac{1}{2a}\int_{x-a}^{x+a} f(\xi)d\xi$$

我們可以把褶積視爲 —— 函數的乘積, 但是這個乘法有個最大的缺憾, 就是沒有單位元素即找不到函數 g 滿足 $f*g=f$, 這個問題的解決則有賴於 δ 函數。

3.3 Dirac Delta 函數

Landau 所引用的函數 $\phi_n(x)$, 當 $n\to\infty$ 時會變得很特殊, 與傳統上所理解的函數有些 (事實上是極大!) 的差異。用現代的語言來說就是 Dirac δ 函數; 它被介紹到科學的領域是起源於英國理論物理學家 Dirac 所研究的量子力學, 在那兒他有系統用 δ 函數作爲工具並獲得相當大的成果。

δ 函數並不是傳統上的函數, 但我們並不能因此說它不存在。數學不能否定已知的事實, 因此解決之道就是回到數學的基礎——函數是什麼? 對函數有更新、更高層次的認識是當務之急; 爲著與傳統的函數有所區別我們將這種新的函數稱爲廣義函數 (generalized function)。

廣義函數的數學理論基礎是後來由蘇聯數學家 S. L. Sobolev(1936) 與法國數學家 L. Schwartz(1950-1951) 所建立, 其中 L. Schwartz 還因這項工作獲得第二屆 Fields 獎 (1950)。爾後經過多人的努力, 目前廣義函數已成爲研究數學、物理甚至工程的必備工具。我們正式給定 δ 函數的定義 (這是 Dirac 的貢獻)。

3.4 定義: δ 函數定義爲

$$\delta(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0\\ 0 & x\neq 0,\end{cases}\quad \int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)dx=1 \tag{3.11}$$

但從常理與情感上而言, 這樣子的函數怎能稱之爲函數呢? 就好比我們要測量物質在某一點的密度; 這怎麼可能呢? 我們唯一可能測量的是在某一點附近的平均密度。這就是整個問題的核心——平均。實際上廣義函數正是透過積分 (也就是平均) 來定義。

考慮函數族

$$\phi_n(x)=\begin{cases}\frac{n}{2}, & |x|<\frac{1}{n},\\ 0, & 其它\end{cases} \tag{3.12}$$

則顯然

$$\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)dx=1 \tag{3.13}$$

$$\delta(x)=\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)=\begin{cases}+\infty, & x=0;\\ 0, & x\neq 0.\end{cases} \tag{3.14}$$

但 (3.14) 是很有爭議的, 如果對它積分

$$\int_{-\infty}^{\infty}\lim_{n\to\infty}\phi_n(x)dx=0$$
$$\neq 1=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)dx$$

顯然逐點收斂 (pointwise convergence) 在此事實上有極大的困難, 克服的方法就是引進弱收斂 (weak convergence) 的概念。

3.5 引理: 對任意的連續函數 $\psi(x)$ 下列等式成立

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)\psi(x)dx=\psi(0) \tag{3.15}$$

證明: 直接相減並利用 $\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)dx=1$。

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)\psi(x)dx-\psi(0)\Big|$$
$$=\Big|\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}\phi_n(x)(\psi(x)-\psi(0))dx\Big|$$
$$\leq\frac{n}{2}\int_{\frac{-1}{n}}^{\frac{1}{n}}|\psi(x)-\psi(0)|dx$$

$\forall\epsilon>0$ 取 $|x|<\frac{1}{n}\leq\delta$, 使得 $|\psi(x)-\psi(0)|<\epsilon$ 則

$$\Big|\int_{-\infty}^{\infty}\phi_n(x)\psi(x)dx-\psi(0)\Big|\leq\epsilon$$

證明完畢。

這個引理告訴我們逐點看時 $\{\phi_n(x)\}$ 的極限是有問題但藉由積分 (平均) 就可以克服。典型的例子就是 $\{\sin nx\}$ 逐點收斂

有問題, 但由 Riemann-Lebesgue 引理可得

$$\int_{-\pi}^{\pi} \sin nx f(x)dx \to 0 \; n \to \infty \quad \forall f \in C[-\pi,\pi]$$

雖然逐點而言極限不存在但弱極限 (weak limit) 卻是存在的 (請參考 [3]), 換句話說弱收斂 (weak convergence) 是研究許多數學物理的自然語言; 如果我們想對大自然有更深入的認識則第一步需改變傳統上對函數的看法。有了 (3.15) 再加上弱收斂的概念, 我們可以重新解釋 (3.14)

3.6 定義: $\phi_n(x)$ 弱收斂到 $\delta(x)$ 記爲

$$\phi_n(x) \xrightarrow{w} \delta(x), \qquad n \to \infty$$

若且唯若

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\psi(x)dx \to \psi(0) \equiv (\delta,\psi), \quad \forall \psi \in C_c(\mathbf{R}) \quad (3.16)$$

如果取$\psi = 1$ 則

$$(\delta, 1) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)dx = 1$$

(3.16) 也可以這麼看 (由$\phi_n(x)$之定義)

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{x} \phi_n(\xi)d\xi = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

這告訴我們 δ 函數可視爲 Heaviside 函數 $H(x)$ 之微分

$$\delta(x) = \frac{d}{dx}H(x), \; H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x > 0, \end{cases}$$

因此 (3.16) 可另外表示爲 Stieltjes 積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)\delta(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)dH(x) = \psi(0) \quad (3.17)$$

另外由 (3.16) 再加上平移可得

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)\delta(x-\xi)d\xi = f * \delta(x) \quad (3.18)$$

所以 δ 函數是乘法單位元素 (在褶積的意義下)。取特殊的 $f(x) = e^{-iwx}$、e^{-xt} 則

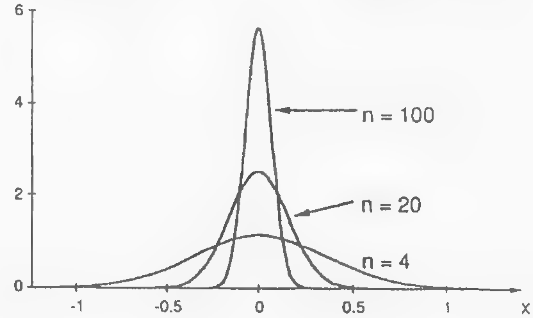
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-iw\xi}\delta(x-\xi)dx = e^{-iwx}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi t}\delta(x-\xi)dx = e^{-xt}$$

令 $x = 0$ 則 (3.19) 告訴我們δ函數的 Fourier 變換與 Laplace 變換等於1;

$$\mathcal{L}[\delta(x)] = \mathcal{F}[\delta(x)] = 1$$

這再一次印證 δ 函數所扮演的角色是乘法單位元素。

註: 以褶積爲乘法的代數結構是泛函分析一重要分枝, 稱爲算子理論, 其中最著名的有 Banach 代數 、C^* 代數與 Von Neumann 代數。



最常見的 Dirac 序列是常態分配 (normal distribution):

$$\phi_n(x) = \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}, \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)dx = 1$$

因此廣義函數論也稱爲荷佈理論 (distribution theory)。由 $\phi_n(x)$ 之特質可知當n很大時幾乎都集中在0點而外部爲0, 所以可對任意連續函數 $\psi(x)$ 在0點附近可視爲常數

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\psi(x)dx \\
&\approx \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\psi(0)dx \\
&= \psi(0)\int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)dx = \psi(0)
\end{aligned}$$

3.7 引理: $\phi_n(x) \xrightarrow{w} \delta(x)$。

證明: 這相當等於

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\psi(x)dx \\
&\equiv \lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x)\psi(x)dx = \psi(0)
\end{aligned}$$

直接相減並利用均値定理 (mean value theorem)

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}\psi(x)dx - \psi(0)\Big| \\
&= \Big|\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2}(\psi(x) - \psi(0))dx\Big| \\
&\le |\psi'(x)|\Big|\int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\frac{n}{\pi}} e^{-nx^2} x dx\Big| \\
&\le ||\psi'||\frac{1}{\sqrt{n\pi}} \to 0, \qquad n \to \infty
\end{aligned}$$

讀者有興趣可嘗試: 下列均爲 Dirac 序列

$$\frac{1}{\pi x}\sin nx, \quad \frac{1}{\pi}\frac{n}{n^2x^2+1}$$

通常可由一個函數來建構 Dirac 序列, 爲此我們有必要引進一個重要觀念。

3.8 定義 (mollifier): 已知函數 $\phi > 0$, $\phi \in C^\infty(\mathbf{R})$ 且

$$\phi(x) = 0, \ |x| > 1; \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x)dx = 1 \tag{3.19}$$

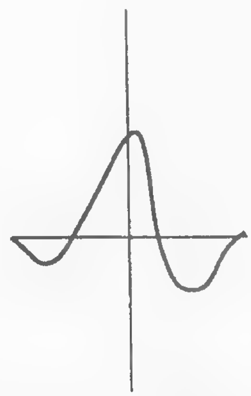
則稱 ϕ 爲緩和劑 (mollifier)。

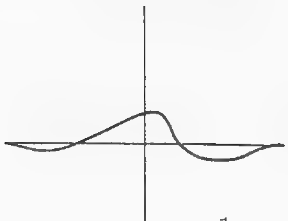
我們還可以作一下尺度 (scaling) 變換: 如果ϕ是可積函數 ($\phi \in L^1(\mathbf{R})$) 令

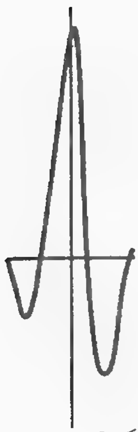
$$\phi_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\phi(\frac{x}{\epsilon}) \tag{3.20}$$

這個新函數的幾何意義是什麼呢? 當$\epsilon < 1$ 會壓縮 (compressing), $\epsilon > 1$ 則伸張 (stretching), 而係數 $\frac{1}{\epsilon}$ 的作用則是當壓縮時 ($\epsilon < 1$) 也就是變瘦了, 但還要維持一定的面積因此身高必須高一點; 同理若伸張時 ($\epsilon > 1$) 變胖了所以要長的矮一點。(如圖所示) 直接計算可得

$$\begin{aligned}
\int \phi_\epsilon(x)dx &= \int \phi(\frac{x}{\epsilon})d(\frac{x}{\epsilon}) \\
&= \int \phi(y)dy, \quad \phi_\epsilon \xrightarrow{w} \delta
\end{aligned} \tag{3.21}$$







3.9 定理: $\{\phi_\epsilon\}$ 是 Dirac 序列。

證明: 方法與引理同。由變換 $x \to \frac{x}{\epsilon}$ 可得

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\epsilon(x)dx = 1$$

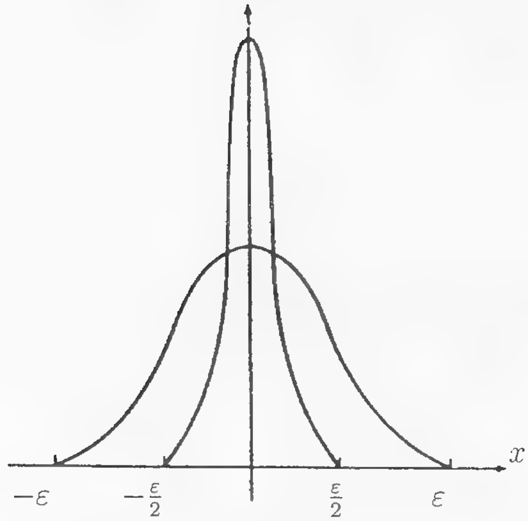
$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|>M} \phi_\epsilon(x)dx = 0 \quad \forall M > 0$$

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{|x|<M} \phi_\epsilon(x)dx = 1 \quad \forall M > 0$$

另外仿照3.7引理的證明可得

$$\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} \phi_\epsilon(x)\psi(x)dx = \psi(0), \qquad \forall\psi \in C(\mathbf{R})$$

註: 由於這個原因我們也稱 $\{\phi_\epsilon\}$ 是近似單位元素 (approximate identity)。



最典型的 mollifier 是

$$\phi(x) = \begin{cases} c\exp\left(\frac{1}{x^2-1}\right), & |x| \le 1 \\ 0, & |x| > 1. \end{cases} \tag{3.22}$$

則由此 mollifier 可得 Dirac 序列

$$\phi_\epsilon = \begin{cases} C_\epsilon \exp\left(-\frac{\epsilon^2}{\epsilon^2-x^2}\right) & |x| \le \epsilon. \\ 0, & |x| > \epsilon. \end{cases} \tag{3.23}$$

其中 C_ϵ 滿足

$$C_\epsilon \epsilon \int_{-1}^{1} \exp\left(-\frac{1}{1-\xi^2}\right)d\xi = 1$$

其他常見的 Dirac 序列如下:

(1) Poisson 核 (Poisson kernel)

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}, \ \phi_y(x) = \frac{y}{\pi(x^2+y^2)}$$

Poisson 核在勢論 (potential theory) 有極重要之應用, 它出現在上半平面的 Dirichlet 問題, 此時的解是一調和函數 (harmonic function), 可藉由 Poisson 核與邊界值的褶積表示出來, 爲著保證

當 $y \to 0^+$ 時此調和函數解會趨近邊界值所以不難想像底下之等式

$$\lim_{y\to 0^+} \phi_y(x) = \delta, \quad \epsilon = y$$

(2) Gauss–Weierstrass 核 (Gauss–Weirstrass kernel)

$$\phi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4}}}{\sqrt{4\pi}}, \ \phi_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}$$

Gauss-Weierstrass 核是熱傳導方程的基本解 (fundamental solution), 在機率論有重要之應用, 爲著保證當 $t \to 0^+$ 時解會趨近初始值所以

$$\lim_{t\to 0^+} \phi_t(x) = \delta(x), \quad \epsilon = \sqrt{t}$$

(3)

$$\phi(t) = H(t)\frac{e^{-\frac{1}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^{\frac{3}{4}}}},$$

$$\phi_x(t) = H(t)\frac{xe^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t^{\frac{3}{4}}}},$$

H : Heaviside 函數

$$\lim_{x\to 0^+} \phi_x(t) = \delta(t), \qquad \epsilon = x^2$$

(4) Fejer 核 (Fejer kernel)

$$\phi(x) = \frac{\sin^2 x}{\pi x^2}, \quad \phi_R(x) = \frac{\sin^2 Rx}{\pi R x^2}$$

$$\lim_{R\to\infty} \phi_R(x) = \delta(x), \quad \epsilon = \frac{1}{R}$$

Fejer核 (Fejer kernel) 是由匈牙利數學家 Fejer 在研究 Fourier 級數時, 以算術平均得其收斂性而來的。

不用 mollifier 也可以得到 Dirac 序列:

(1) Dirichlet 核 (Dirichlet kernel)

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi x}\sin x,$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin nx}{\pi x} = \delta(x)$$

Dirichlet核的出現是在於處理 Fourier 級數的收斂性問題。

(2) Landau 的證明方法就是用這個 Dirac 序列

$$\phi_n(x) = \begin{cases} (1-x^2)^n/I_n, & |x| < 1. \\ 0, & |x| \geq 1 \end{cases}$$

$$\lim_{n\to\infty} \phi_n(x) = \delta(x),$$

$$I_n = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^n dx$$

這個序列與 Legendre 多項式$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$ 有極密切之關係。

(3) Poisson 核 (Poisson kernel)

$$\phi_r(\theta) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1-r^2}{1+r^2-2r\cos\theta}\right) & |\theta| \leq \pi \\ 0 & |\theta| > \pi. \end{cases}$$

這個形式的 Poisson 核出現在單位圓的 Dirichlet 問題, 爲著保證此調和函數解在單位圓會趨近邊界值, 所以

$$\lim_{r\to 1^-} \phi_r(\theta) = \delta$$

4、Weierstrass 的方法:

Weierstrass 的證明方法不像 Bernstein 或 Landau 那麼直接, 中間多了一道手續—— 平滑化 (regularization)。f爲任意可積函數, 則其平滑化爲

$$f_\epsilon(x) = f * \varphi_\epsilon(x) \tag{4.1}$$

φ 爲一 mollifier,φ_ϵ 如 (3.20)。

4.1 引理: f 爲有界區間 $[a,b]$ 上的連續函數, 則 f_ϵ 一致收斂到 f

$$\lim_{\epsilon\to 0} f_\epsilon(x) = \lim_{\epsilon\to 0} f*\varphi_\epsilon(x) = f(x), \quad \forall x\in[a,b] \qquad (4.2)$$

證明: 由定義

$$f_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon}\int_{|x-y|<\epsilon} \varphi(\frac{x-y}{\epsilon}) f(y)dy = \int_{|z|\le 1}\varphi(z) f(x-\epsilon z)dz \qquad (z=\frac{x-y}{\epsilon})$$

但 $[a,b]$ 是緊緻區間,f是一致連續顯然

$$\begin{aligned}&\sup_x |f(x)-f_\epsilon(x)|\\ \le&\sup_x \int_{|z|\le 1}\varphi(z)|f(x)-f(x-\epsilon z)|dz\\ \le&\sup_x\sup_{|z|\le 1}|f(x)-f(x-\epsilon z)|\to 0\ \ \epsilon\to 0\end{aligned}$$

故f_ϵ一致收斂到f。

註: 4.1 引理在分析中扮演著非常重要的角色, 甚至 f 只是可積函數 (L^1) 或者 p 次方可積函數 (L^p) 都是成立, 有興趣的讀者可參閱 [5]、[8]。

4.2 定理 (Weierstrass): $f\in C[a,b]$, 則 $\forall\delta>0, \exists$ 多項式 P 滿足

$$\sup_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)| \equiv \max_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|<\delta \qquad (4.3)$$

證明: Weierstrass選取的是

$$\varphi(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}$$

直接微分, φ 具有底下之性質

$$\varphi^{(k)}(x) = q_k(x)e^{-x^2}, \quad q_k \text{ 爲 } k \text{ 次多項式}$$
$$|\varphi^k(x)|\le C_k e^{-|x|}$$

由4.1引理知

$$f_\epsilon = f*\varphi_\epsilon \to f \quad \text{一致收斂}$$

$$\sup_{a\le x\le b}\left|f(x)-\frac{1}{\epsilon\sqrt{\pi}}\int_a^b e^{-(x-y)^2/\epsilon^2} f(y)dy\right|<\frac{\delta}{2} \qquad (4.4)$$

另一方面由於 $[a,b]$ 是緊緻集, 故 e^{-x^2} 的 Taylor 級數 $\sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n x^{2n}}{n!}$ 一致收斂到 e^{-x^2}, 換句話說, 存在多項式 $P(x)$ 滿足

$$\sup_{a\le x\le b}|f_\epsilon(x)-P(x)|\le\frac{\delta}{2} \qquad (4.5)$$

由 (4.4)、(4.5) 可得

$$\sup_{a\le x\le b}|f(x)-P(x)|<\delta$$

證明完畢。

Weierstrass 逼近定理的意義

1. 分析:

我們在高等微積分研究的主題是連續函數, 所用到的收斂是均勻收斂或一致收斂 (uniform convergence)。換句話說, 我們所探討的空間是

$$(C[a,b], ||\cdot||) \quad ||f||\equiv\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

令 $P[a,b]$ 代表所有多項式所形成之空間, 則 Weierstrass 逼近定理告訴我們任意的連續函數都能以多項式近似之, 而且可以達到任

意要求的精度。這情形正如有理數在實數中一樣, 對於任意的實數 $r \in \mathbf{R}$ 永遠可以找到有理數 $q \in \mathbf{Q}$ 使得 $|r-q| < \epsilon$。同理如果f是任意的連續函數 ($f \in C[a,b]$), 總是存在多項式 $p_n(x) \in P[a,b]$ 滿足 $\|f - p_n\| < \epsilon$。所以 Weierstrass 定理告訴我們多項式函數在連續函數內是稠密的 (dense), 換個角度而言 (用分析的語言)$(C[a,b], \|\cdot\|)$ 是 $(P[a,b], \|\cdot\|)$ 的完備化 (completion)

$$\begin{array}{ccc} (\mathbf{Q}, |\cdot|) & \longrightarrow & (\mathbf{R}, |\cdot|) \\ (P[a,b], \|\cdot\|) & \longrightarrow & (C[a,b], \|\cdot\|) \end{array}$$

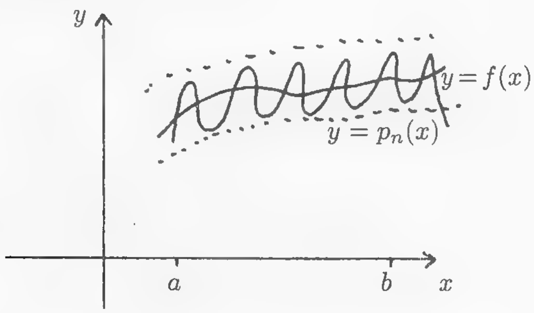
2. 幾何:

Weierstrass 逼近定理從圖形上來看是相當明確的, 已知任意連續函數 f 與任意正數 ϵ, 我們可以取一寬度爲2ϵ的帶狀區域使得 f 通過該區域之中線 (你可以想像成一個口徑爲 2ϵ 的水管將 f 包在裡面), 我們恆可以取得次數夠高之多項式

$$p_n(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$

使得 $p_n(x)$ 之圖形全部落在帶狀區域之內。

在這裡值得一提的是帶狀區域之 ϵ 對於任意點 $x \in [a,b]$ 都是一樣的。因此也不難想像 Weierstrass 是如何發現均勻收斂的觀念。



附記: 中研院數學所劉豐哲教授於 1987年在數學傳播十一卷二期 p.44-47之著作:「弱大數法則, Bernstein 多項式及 Weierstrass 逼近定理」。對於 Weierstrass 定理在機率上的意義有詳盡的討論, 有興趣的讀者可參閱該文。

參考資料:

1. 數學之內容方法及意義 (I,II,III), 徐氏基金會出版 (1970)。
2. 近代分析之研究, 徐氏基金會出版 (1971)。
3. 林琦焜, Riemann-Lebesgue 引理與弱收斂, 數學傳播季刊, 81, pp.17-28, (1997)。
4. Howard Eves, *An Introduction to the History of Mathematics*, (1976).
5. Gerald B. Folland, *Fourier Analysis and Its Applications*, Wadsworth & Brooks/Cole Mathematics Series, Pacific Grove, California, (1992).
6. E. Hairer and G. Wanner, *Analysis by Its History*, UTM : Reading in Mathematics, Springer-Verlag (1995).
7. Jerrold E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, Marcel Dekker, New York (1973).
8. R. Wheeden and A. Zygmund, *Measure and Integral*, Marcel Dekker, New York (1977).

—本文作者任教於國立成功大學數學系暨應用數學研究所—

如何找出劣幣?
—簡介訊息與熵的概念

蔡聰明

機率、訊息、熵、混沌與碎形是現代資訊革命所產生之新的科學典範 (paradigm)。作爲將要邁入21世紀的現代人, 很有必要去掌握這些概念。

本文我們僅輕輕觸及「機率、訊息、熵」這一面, 作最初步的淺介。

一、一個益智問題

> 在益智遊戲裡, 有這樣一個問題:
>
> 給27個外表完全相同的硬幣, 其中恰有一個的重量跟其它的不同, 叫做劣幣, 要利用天平把它秤出來, 問應如何秤法? 最少要秤幾次?

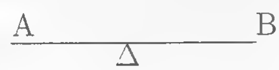
這是施展分析法與實驗試誤法的好問題, 求得解答並不困難。表面上看起來, 這個問題只是作爲「茶餘飯後」的益智談論, 但是如果認眞追根究柢, 它的背後卻涉及到「熵」(entropy) 的概念、訊息理論 (information theory)、遍歷理論 (ergodic theory) 等等, 這些就非常重要了。

因此, 這是一個好例子, 足以引動好奇心, 產生追尋過程, 進入一個美麗的天地。換言之, 這個「特例」具有推展到「一般理論」的妙趣。

二、已知劣幣是輕或重

不妨假設劣幣較輕 (較重的情形同理可求解)。首先將27枚硬幣均分成 A, B, C 三堆, 每一堆都含有9枚, 再按下面三個步驟就可以找到劣幣:

第一步: 任選兩堆, 例如 A 與 B, 分別置於天平的兩邊, 得到三種可能的結果:

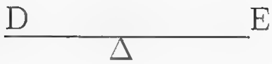
(1)


(2)


(3)


我們由 (1),(2),(3) 可知, 劣幣分別在 C, B 或 A 這一堆。

第二步: 將含劣幣這一堆, 再均分成 D, E, F 三堆, 每一堆都含有3枚, 再仿第一步的辦法, 任取兩堆, 例如 D 與 E, 分別置於天平的兩邊, 得到三種可能結果:

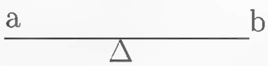
(4) 

(5) 

(6) 

對應於 (4),(5),(6) 三種情形, 可知劣幣分別在 F, E 或 D 這一堆, 令其三枚硬幣爲 a, b, c。

第三步: 從 a, b, c 中任取兩枚, 例如 a 與 b, 分別置於天平兩邊, 得到三種可能結果:

(7) 

(8) 

(9) 

由此立知, 對應於 (7),(8),(9) 三種情形, 劣幣分別爲 c 或 b 或 a。

結論: 秤三次必可找出劣幣, 並且秤法如上所述。

三、不知劣幣是輕或重

這種情形必須多秤一次, 即總共要秤四次, 如下:

若第一次秤的結果是 (2), 則知 C 堆皆是良幣。取 A 與 C 秤第二次:

(i) 如果平衡, 則知劣幣在 B 堆之中且較輕;

(ii) 如果 A 重 C 輕, 則知劣幣在 A 堆之中且較重。

注意, A 輕 C 重的情形不可能發生。

接著不妨考慮 (i) 的情形。將 B 堆等分成 D, E, F 三堆, 每堆皆含三枚硬幣。任取 D 與 E 兩堆秤第三次: 如果平衡, 則劣幣在 F 堆且較輕; 如果 D 重 E 輕, 則劣幣在 E 堆且較輕; 如果 D 輕 E 重, 則劣幣在 D 堆且較輕。

假設劣幣在 $F = \{a, b, c\}$ 這一堆, 任取 a 與 b 兩枚硬幣秤第四次: 如果平衡, 則劣幣爲 c 且較輕; 如果 a 重 b 輕, 則劣幣爲 b 且較輕; 如果 a 較 b 重, 則劣幣爲 a 且較輕。

結論: 秤四次必可找出劣幣, 並且知道劣幣是較重或較輕。

四、更多的疑惑

數學的美妙之一就是, 當我們解決一個問題時, 往往會生出更多的問題, 好像是神話故事中的怪蛇, 每砍斷一個頭, 立刻又長出三個頭。數學家的主要興趣在於, 由特殊問題引出一大類問題, 然後一舉解決整類問題。在解決問題的過程中, 特殊問題通常扮演著引導與照亮暗路的燈光。

在上述問題中, 27枚硬幣, 秤3次或4次, 這些數字是偶然的嗎? 它們有什麼關連? 如果改爲12枚或30枚又如何? 一般而言, N 枚硬幣需秤幾次? 如果允許秤5次, 最少與最多可鑑定幾枚硬幣? 秤 n 次呢?

對於這一整類問題, 欲求得一個全盤的解決辦法, 這就是訊息理論所要研究的一個

論題。事實上, 這只是訊息理論的一個簡單應用。

在 N 枚硬幣中, 含有一枚劣幣, 但不知是哪一枚。這表示我們對此系統有某種程度的「無知」(ignorance), N 越大無知的程度也越大。當我們得知劣幣是哪一枚時, 就獲得了「訊息」(information), 從「無知」變成「知」。

我們用天平每秤一次, 就得到一些「訊息」, 把「無知」的程度減少一點。逐步秤就逐次累積「訊息」, 終至把無知完全消除。

對於「訊息」每個人都有或多或少的直觀了解 (正如對美醜有所了解一樣), 但是我們要的是「定量」(quantitative) 的掌握。從直觀的「定性」(qualitative) 描述走到精確的「定量」刻劃, 乃是科學探索的發端, 然後定量與定性迴旋交互運用。因此, 我們的問題是:

如何度量一個事件的「訊息」?

由此可展開一個驚心動魄的「觀念探險」(adventures of an idea) 之旅。

五、事件的局部訊息

解讀「自然之書」(the Book of Nature) 是科學求知活動最重要且最有趣的主題。大自然像古羅馬 Janus 神一樣有許多面, 甚至是無窮多面。機率論 (probability theory) 就是解讀大自然的反覆無常 (caprice)、說不準 (uncertainty) 這一面而發展出來的數學理論。

自然或人文現象大致可分成定命的 (deterministic) 與隨機的兩個範疇 (categories)。前者說得準, 即在給定條件或原因之下, 鐵定會得到某個果 (具有一定的因果關係), 所謂「種瓜得瓜, 種豆得豆」; 而後者在給定條件下, 可能得到這個果, 也可能得到那個果, 即有種種可能的結果 (outcomes)。

對一個隨機現象作實驗觀測, 就叫做「隨機實驗」(random experiment)。我們對「實驗」採取廣義的解釋, 它可以是天然發生的或人爲設計的, 例如丟一個骰子, 觀測生男或生女, 預測明天的天氣, 一個袋子含有27枚硬幣從中任取出一枚, 這些都隨機實驗。

令 Ω 表示一個隨機實驗所有可能出現的結果, 叫做樣本空間 (sample space)。例如丟一枚硬幣時,$\Omega = \{H, T\}$; 丟兩個骰子時,

$$\Omega = \{(1,1), \cdots, (1,6), \cdots, (6,6)\}。$$

樣本空間的一個子集 $A \subset \Omega$ 就叫做一個事件 (an event)。我們用 $P(A)$ 表示事件 A 發生的機率 (probability), 它是介於0與1之間的一個數。

當我們觀測到或聽到一個事件發生時, 就得到了一些「訊息」。例如考慮下面兩個事件:

「太陽從東邊出來」與「人咬狗」。

第一句話幾乎是必然事件, 機率爲1, 我們聽到它發生, 一點都不覺得驚訝 (surprise), 沒有得到「訊息」。第二句話是稀有事件, 機率很小, 我們聽到它發生, 覺得很驚訝, 得到很多「訊息」。因此, 訊息的多寡跟機率很有關係, 一個事件的機率越小, 但發生了, 我們就

得到越多的訊息。換言之, 一個事件的訊息是其機率的函數。

一般而言, 作一個隨機實驗, 令事件 A 的機率$P(A) = p$, 今觀測到 A 發生, 我們得到訊息

$$I = f(p)$$

問題: f是什麼函數呢?

通常要追尋一個函數並不容易, 好在「大自然」會透露一些線索, 提供我們有關 f 的一些訊息, 由此常可唯一決定出 f。例如, 當 A 為一個必然事件 (sure event), 即$P(A) = 1$ 時, A 發生我們沒有得到訊息。換言之,

(i) $f(1) = 0$

其次, 當 p 越小時, $f(p)$ 越大, 即

(ii) f 為一個遞減函數

進一步, 因為當 p 微小改變時, 只導致訊息的微小改變, 故我們可以假設

(iii) f 為一個連續函數

這是欲作數學討論的一個起碼要求。

這三個條件能唯一決定 f 嗎? 不能! 因為

$$f(p) = \alpha(1-p)^n,\ \alpha > 0,\ n \in \mathbb{N}$$

$$f(p) = -k\log p,\ k > 0$$

$$f(p) = 1 - e^{p-1}$$

顯然都滿足上述三個條件。事實上, 有無窮多個函數滿足 (i) 至 (iii) 的條件。要唯一決定 f 的形式, 還需要其它條件。

一個隨機實驗通常並不是單純的如丟一個銅板或一個骰子, 而是由許多小實驗合成的, 例如丟 n 次銅板的隨機實驗就是由丟一個銅板的小實驗獨立地作 n 次整個合起來的。這當然也可以看成是幾個相同的銅板丟一次的隨機實驗。

今考慮一個複合的隨機實驗。設 A 與 B 為兩個事件, 則 $A \cap B$ 表示 A 與 B 都發生的事件。如果

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

則稱 A 與 B 是獨立的 (independent)。獨立性的概念在機率論與統計學中佔有核心的地位, 在重覆獨立的實驗中, 才浮現出「機運」的規律性。

假設 A, B 是兩個獨立事件, 今 $p = P(A)$, $q = P(B)$, 則 $P(A \cap B) = pq$。A 發生並且 B 又發生, 我們得到 $f(pq)$ 的訊息。那麼 $f(pq)$ 與 $f(p), f(q)$ 是什麼關係呢?

A 發生, 我們得到訊息 $f(p)$。由於 A, B 是獨立的, 故 A 發生後 B 再發生, 我們又得到訊息 $f(q)$, 完全跟 p 無關, 兩者合起來就得到 $f(pq)$。換言之,

(iv) $f(pq) = f(p) + f(q)$

這個條件大大地局限了 f 的可能性。事實上, (i)-(iv) 唯一決定 f 的形式, 這就是下面的結果:

定理1: 如果函數 $f : (0,1] \to [0,\infty)$ 滿足上述 (i)-(iv) 的條件, 則 f 必形如

$$f(p) = -K\log_2 p,\ K > 0.$$

證明: 由 (iv) 知

$$f(p^2) = f(p) + f(p) = 2f(p).$$

由數學歸納法可知

$$f(p^m)=mf(p),\quad \forall m\in\mathbb{N} \tag{1}$$

從而, 對任意自然數n, 我們有

$$f(p)=f(p^{1/n}\dots p^{1/n})=nf(p^{1/n})$$

於是

$$f(p^{1/n})=\frac{1}{n}f(p) \tag{2}$$

由 (1) 與 (2) 兩式得知, 對任意非負有理數r

$$f(p^r)=rf(p) \tag{3}$$

再由 f 的連續性知, 對任意非負實數 x, 恆有

$$f(p^x)=xf(p) \tag{4}$$

今對任意實數p, $0<p\leq 1$, 令$x=-\log_2 p$, 則$p=(\frac{1}{2})^x$。由 (4) 式知

$$\begin{aligned} f(p)&=f\Big((\frac{1}{2})^x\Big)=xf(\frac{1}{2})\\ &=-K\log_2 p \end{aligned} \tag{5}$$

其中$K=f(\frac{1}{2})$ 並且由 (i) 與 (ii) 知

$$K=f(\frac{1}{2})>f(1)=0$$

至此證明完畢。

通常取 $K=f(\frac{1}{2})=1$, 這意指取定一個度量單位, 此時度量出的訊息單位叫做 bit(位元, binary digit)。從而公式 (5) 變成

$$f(p)=-\log_2 p\quad \text{bits} \tag{6}$$

假設事件 A 的機率爲 p, 那麼得知 A 發生所得到的訊息爲 $-\log_2 p$ bits, 這叫做事件 A 的局部訊息量 (local information)。丟一個公正銅板, 正面與反面出現的機率各 $\frac{1}{2}$, 當我們得知出現正面時, 就得到 1 bit 之局部訊息量。

六、一個機率分佈的熵

我們先考慮下面三個例子:

甲. 在賽馬場上, 兩匹勢均力敵的馬, 不易預測其結果; 但是兩匹相差懸殊的馬, 幾可預知其結果。

乙. 丟一個骰子比丟一個銅板的不確定性更大。

丙. 丟一個公正銅板比丟一個有偏銅板 (如出現正、反面的機率分別爲0.8與0.2) 更讓人捉摸不定。

這些大家都「直觀地」承認, 但是我們的問題是:

> *如何衡量一個隨機實驗的不確定性程度?*

機率空間 $(\Omega,\ \mathcal{F},\ P)$ 是隨機實驗所含資訊的精簡與理想化, 是一切機率演算的基礎。但是, 這並不夠, 我們還需要隨機變數 (random variable) 的概念

$$X:\Omega\to\mathbb{R}$$

使我們更自由靈活地探討機率問題。隨機變數可以解釋成賭徒的輸贏金額, 對事件的重新改訂, 一種出象機制, 一種觀測度量,...等等。

一般而言, 觀察一個隨機實驗, 其結果是一個隨機變數X。假設 X 只取有限多個

値 $x_1, x_2, \ldots, x_n$, 令事件 $A_k = \{X = x_k\}$ 的機率爲 p_k。顯然

$$p_k \geq 0,\ k = 1, 2, \ldots, n \text{ 並且 } \sum_{k=1}^{n} p_k = 1$$

我們稱 $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ 爲隨機變數X的機率分佈 (probability distribution)。於是我們的問題變成:

> 如何衡量隨變數 X 或機率分佈 $(p_1, \ldots, p_n)$ 的不確定性程度?

機率論對初學者構成困擾的原因之一, 就是沒有分淸楚「已然」與「未然」、「現實」與「可能」。在隨機實驗未作之前有各種可能結果, 但是作了實驗之後, 出現一個結果, 就叫做一個「現實」(a realization)。只有在未作實驗之前的「未然的」與「可能的」世界, 才有機率可言。

今作一個隨機實驗, 報告說事件 A_k 發生了, 我們得到的驚訝量或局部訊息爲 $-\log_2 p_k$。可是在未然的世界, 我們只知道可能發生 A_1, 也可能發生 $A_2, \ldots$, 等等, 這是說不準的。由於發生 A_k 的機率是 p_k, 我們自然應該考慮期望値, 將 $-\log_2 p_k$ 乘以 p_k, 再對 k 求和得到

$$S(p_1, \ldots, p_n) = S(X) = -\sum_{k=1}^{n} p_k \log_2 p_k \tag{7}$$

其中若出現$0 \log_2 0$就定義爲$\lim_{p \to 0} p \log_2 p = 0$。$S(p_1, \ldots, p_n)$ 或 $S(X)$ 就是局部訊息量的期望値 (expectation) 或平均値, 我們又稱之爲 X 或機率分佈 $(p_1, \ldots, p_n)$ 的熵 (entropy), 這是夏農 (Shannon) 在1948年引進的一個重要的概念。

熵是對整個隨機實驗, 表現爲機率分佈 $(p_1, \ldots, p_n)$, 所呈現出的不確定性或混亂程度之度量。由長期觀點來看, 每作一次隨機實驗, 我們從「無知」到「知」, 平均就得到 $S(p_1, \ldots, p_n)$ 的訊息量。

注意到, 在訊息論中, 隨機變數不重要, 它的取値也不重要, 重要的是它的機率分佈。事實上, 熵只跟機率分佈 $(p_1, \ldots, p_n)$ 的組合有關, 而跟其排列順序無關。作爲度量「不確定性」, 熵比機率分佈更模糊, 因爲可以有各種不同的機率分佈對應相同的熵。

如果機率分佈是均勻分佈, 即

$$p_k = \frac{1}{n}, \quad k = 1, 2, \ldots, n$$

則它的熵爲

$$H(\frac{1}{n}, \ldots, \frac{1}{n}) = \log_2 n \tag{8}$$

此式叫做 Hartley 公式, 因爲 Hartley 在1928年首度建議採用對數函數作爲度量訊息的工具。

我們可以想像有一個資訊源 (an information source), 可能出現的結果是 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 並且機率均等:



那麼它的熵就是 $\log_2 n$, 這恰好也等於觀察到任何一個値 x_k 所得的局部訊息, 兩者合一。

例1: 一張身份證的號碼含有多少訊息?

目前台灣約有21,000,000人, 每個人一個號碼, 機率均等, 故訊息量爲

$$\log_2(21000000) = 24.3238 \text{ bits}$$

例2: 觀看電視的一個畫面, 得到多少訊息?

一個畫面由許多小光點組成, 例如假設畫面分成500行與600列, 一共有 $500 \times 600 = 300,000$ 個光點, 再假設每一個光點有10種可分辨的顏色選擇, 於是總共有 $10^{300,000}$ 種可能的畫面, 機率都相等。因此, 觀看一個畫面的訊息量爲

$$300,000 \log_2 10 \doteqdot 10^6 \text{bits}$$

我們不妨作一個比較: 從收音機收聽到1000個字的廣播, 得到多少訊息? 假設常用字有10,000個, 從中任意選取出1000個字, 總共有 $(10000)^{1000}$ 種取法, 並且機率均等, 所以收聽到1000個字所得的訊息量爲

$$1000 \log_2 10000 \doteqdot 1.3 \times 10^4 \text{bits}$$

這正好應驗一句諺語:「一個圖勝過千言萬語」(One picture is worth a thousand words.)

問題: 考試卷上, 一個是非題的訊息是多少? 一個「五選一」的選擇題, 其訊息是多少? 一個有五個選項的多重選擇題, 其訊息是多少?

我們要強調, 訊息論不作價值判斷, 要談「一句話的訊息量」決不能談這句話是好消息或壞消息。例如, 一位男士問他的女朋友: 你喜歡吃牛肉麵嗎? 你嫁給我好嗎? 假設回答 Yes 或 No 的機率皆爲0.5, 那麼不論是得到什麼答案, 這兩句話的訊息量都是 1 bit。但是, 若考慮價值判斷, 後一句話的答案顯然重要得多。

這也警告我們, 數學的訊息並不是唯一重要的考量。我們常聽說: 寫文章要「言之有物」, 不要「言之無物」; 好的文章每一句都恰到好處, 而又有難以預期的驚訝; 詩比散文含有更多的訊息。這些都很重要, 但不是訊息論所能完全掌握。

總之, 有不確定性或渾沌不明就有機率分佈, 有機率分佈就有訊息或熵。

七、熵的性質與刻劃

根據 (7) 式的定義, 我們容易驗得熵具有下列性質:

(A_1) $S(p_1,\ldots,p_n) \geq 0$ 並且等號成立 $\Leftrightarrow$ 存在某個 $p_k = 1$。

這表示不確定性恆爲非負數並且當隨機性不存在時, 等於0。

(A_2) $S(p_1,\ldots,p_n,0) = S(p_1,\ldots,p_n)$

(A_3) $S(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n}) \leq S(\frac{1}{n+1},\ldots,\frac{1}{n+1})$

(A_4) $S(p_1,\ldots,p_n)$ 爲一個連續的且對稱的函數。

(A_5) $S(p_1,\ldots,p_n) \leq H(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$

這表示機率是均勻分佈時, 有最大熵。

證明: Jensen 不等式告訴我們: 如果 f 爲定義在 $[a,b]$ 上的一個凸函數 (convex function), 則對於任意 $x_1,\ldots,x_n \in [a,b]$ 以及 $\lambda_k \geq 0$, $\sum_{k=1}^n \lambda_k = 1$, 恆有

$$f(\sum_{k=1}^n \lambda_k x_k) \leq \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k) \qquad (9)$$

今因 $f(x)=-x\log_2 x$ 為一個凹函數, 取

$$a=0, b=1, x_k=p_k, \lambda_k=\frac{1}{n}$$

則得

$$\begin{aligned}&-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}p_k\log_2 p_k\\ &\le -(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}p_k)\log_2(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}p_k)\end{aligned}$$

從而

$$S(p_1,\ldots,p_n)\le\log_2 n=S(\frac{1}{n},\ldots,\frac{1}{n})$$

證畢。

其次, 我們考慮兩個隨機實驗複合成一個大實驗之訊息量。假設兩個實驗之觀測值分別是隨機變數 X 與 Y, 那麼複合實驗之觀測值是隨機變數 $Z=(X,Y)$, 令其機率分佈為 (r_{ij})。再令

$$\begin{gathered}p_i=\sum_j r_{ij},\ q_j=\sum_i r_{ij}\\ i=1,\ldots,n, j=1,\ldots,m,\end{gathered}$$

則 (p_i) 與 (q_j) 分別是 X 與 Y 的機率分佈。考慮 (r_{ij}) 的訊息量 $S(Z)=S(r_{ij})$, 這又可以看成是兩個步驟之和: 先作實驗 X, 得到訊息量 $S(X)=S(p_i)$; 然後如果知道 $X=x_i$, 則 $Y=y_j$ 的條件機率為 ${}_i\pi_j=r_{ij}/p_i$, 故已知 $X=x_i$ 時, Y 的「條件訊息」為 $S({}_i\pi_1,{}_i\pi_2,\ldots,{}_i\pi_m)$, 整個合起來, 已知 X 時, Y 的「條件訊息」為

$$S(Y|X)=\sum_{i=1}^{n}p_iS({}_i\pi_1,\ldots,{}_i\pi_m) \quad (10)$$

從而, 我們有

(A_6) $S(Z)=S(X)+S(Y|X)$

特別地, 當 X 與 Y 獨立時, 即 $r_{ij}=p_i\cdot q_j$, 有 $S(Y|X)=S(Y)$ 並且

$$S(Z)=S(X)+S(Y)。$$

由 Jensen 不等式也可證得

$$S(Y|X)\le S(Y)$$

反過來, 一個函數 H 若滿足 (A_1) 至 (A_6) 的條件, 則 H 必形如

$$H(p_1,\ldots,p_n)=-\sum_{k=1}^{n}p_k\log_2 p_k \text{ bits}$$

其中 1 bit= $H(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。我們省略掉證明。

因此, 我們可以採用公理化的手法來定義熵。所謂一個機率分佈的熵是指滿足 (A_1) 至 (A_6) 的函數。

八、熵與劣幣的找尋

找尋劣幣的問題, 有了熵的概念, 使我們看得更清楚, 心中有數。

天平秤一次 (即作一次隨機實驗) 得到多少訊息?

因為天平兩端必須置同數的硬幣, 故只能是下列兩種情形:

(i) 將硬幣等分成兩堆: 但這限於總硬幣數為偶數, 並且秤一次只可能是「左輕右重」或「左重右輕」, 故最多可得 1 bit 之訊息量。

(ii) 將硬幣分成三堆, 其中至少有兩堆的硬幣數相等, 秤一次的可能結果是「平衡」、「左輕右重」或「左重右輕」, 故最多可得 $\log_2 3$ bits 之訊息量。

對照起來, 分成三堆的情形, 可得較多的訊息。

現在回到27枚硬幣的問題。將硬幣分成 A, B, C 三堆, 各含有 n, n 及 $27-2n$ 枚硬幣, 取 A 與 B 兩堆來秤。由於每一枚的機率均等, 故

$$\text{平衡的機率爲 } \frac{27-2n}{27}$$
$$\text{左輕右重的機率爲 } \frac{n}{27}$$
$$\text{左重右輕的機率爲 } \frac{n}{27}$$

欲得最大訊息 $\log_2 3$, 則必須三者的機率相等

$$\frac{n}{27} = \frac{n}{27} = \frac{27-2n}{27} = \frac{1}{3}$$

從而, $n = 9$。因此, 最好的秤硬幣的方式是: 等分成三堆, 然後任取兩堆在天平上作比較。

其次考慮總共需秤幾次的問題。27枚硬幣的訊息量是多少? 我們仍然分成兩種情形討論:

(a) 已知劣幣是輕或重的情形。

因爲27枚硬幣的機率均等, 故總訊息量 (或熵) 爲 $\log_2 27$ bits。又知秤 n 次最多可得 $n\log_2 3$ 之訊息量。若欲

$$n\log_2 3 \geq \log_2 27$$

則必 $n \geq 3$。因此, 最少需秤3次。

(b) 不知劣幣是輕或重的情形

因爲每一枚硬幣可能是輕或重, 故總共有 $2 \times 27 = 54$ 種可能, 且機率均等, 從而總訊息量爲 $\log_2 54$。若欲

$$n\log_2 3 \geq \log_2 54$$

則必 $n \geq 4$。因此, 最少需秤4次。

事實上, 我們實際秤量的結果, 前者秤3次, 後者秤4次, 就可以找到劣幣, 且知較輕或較重。

最後考慮秤 n 次最多可鑑定幾枚硬幣的問題。假設我們不知道所含的劣幣是較輕或較重。

根據上述的討論, 如果最多可鑑定 N_n 枚, 則

$$n\log_2 3 \sim \log_2 2N_n$$

亦即

$$N_n \sim \frac{3^n}{2} \tag{11}$$

這只是初步的估計。

爲了求得精確公式。我們採用歸納法。首先觀察特例, 容易驗知:

(i) 當 $n = 2$ 時, $N_2 = 3 = 3^1$
(ii) 當 $n = 3$ 時, $N_3 = 12 = 3^1 + 3^2$
(iii) 當 $n = 4$ 時, $N_4 = 39 = 3^1 + 3^2 + 3^3$

由此我們猜測, 對於一般 n,

$$N_n = 3^1 + 3^2 + \cdots + 3^{n-1} = \frac{3^n}{2} - \frac{3}{2} \tag{12}$$

如何證明呢? 物理學家戴森 (F. J. Dynson) 利用三進位法證明了 (12) 式, 參見 [6]。

至此有關找尋劣幣的問題完全解決。例如, 由 (12) 式知, 秤5次可鑑定硬幣數的範圍是40到120枚。

九、熵的歷史演化

熵的概念最初發源於熱力學, 這是 Clausius 在1864年引入的一個重要概念。Boltzmann 在1896年強調熱力學的熵與機率

具有密切關係。1928年 Hartley 將 Boltzmann 的想法引進訊息論中, 得到 Hartley 公式 [即 (8) 式]。1948年 Shannon 再推廣成 Shannon 公式 [即 (7) 式]。Kolmogorov 在1958年將 Shannon 熵的公式引入動力系統, 用來研究兩個動力系統的同構問題。今日熵的概念已遍及科學、數學, 甚至人文、藝術的領域, 變成日常生活的用語。

古希臘哲學家柏拉圖 (Plato, 427-347 B.C.) 非常重視幾何學, 他說:

(i) 不懂幾何學的人不得進入此門 (柏拉圖學院的門)。

(ii) 不知道正方形的邊與對角線是不可共度 (即 $\sqrt{2}$ 不是有理數) 者愧生爲人。

隨著文明的進展, 到了近代, 邏輯哲學家羅素 (B. Russell, 1872-1970) 說:

> 不懂牛頓如何從刻卜勒 (Kepler) 定律推導出萬有引力定律的人是沒有受過教育的。

現代物理學家惠勒 (Wheeler) 改述爲:

> 在過去, 只有當一個人了解熵的概念後, 才能說是受過科學教育。在將來, 如果一個人不懂碎形 (fractal), 則會被認爲是科學文盲。

不確定性與混沌, 表現爲機率分佈, 一方面讓我們不可預期, 甚至困惑, 另一方面也讓我們得到驚訝與啓示。只有機運能夠對我們說話, 從中我們解讀出豐富的含義。然而, 機運仍然是一個謎。莎士比亞 (Shakespeare, 1564-1616) 問得好:

> 如果你能洞穿時間的種子, 並且知道哪一粒會發芽, 哪一粒不會, 那麼請告訴我吧! (If you can look into the seeds of time and say which grain will grow and which will not. Speak then to me!)

參考資料

1. G. Raisbeck, Information Theory, The M.I.T. Press, 1965.
2. G. Caglioti, The Dynamics of Ambiguity, Springer-Verlag, 1992.
3. A. Renyi, A Diary on Information Theory, John Wiley and Sons, 1984.
4. L. Brillouin, Science and Information Theories, Academic Press, 1956.
5. J. D. Beasley, The Mathematics of Games, Oxford Univ. Press, 1990.
6. F. J. Dyson, The problem of pennies, Mathematical Gazette, 231-234, 1946.
7. J. D. Fast, Entropy, the significance of the concept of entropy and its applications in science and technology, Macmillan, 1982。
8. P. Walters, An Introduction to Ergodic Theory, Springer-Verlag, 1982.
9. R. K. Guy and R. J. Nowakowski, Coin-weighing problems, American Math. Monthly, 164-167, 1995.

—本文作者任教於台灣大學數學系—

建構主義與數學教育

鄭毓信

摘要: 本文首先從一般角度指明了建構主義新近發展的主要特點及其教學涵義: 它正經歷著由一元論、極端主義向多元論、"整合論"的發展, 並從根本上構成了對傳統教學思想的嚴重挑戰; 其次, 筆者又針對數學教育的特殊性作出了進一步的論述: 建構主義不僅爲數學的本體論問題提供了合理的解答, 而且也促成了數學觀的革命性變革, 文中並從這樣的角度對"解釋" 與"理解"、形式化與非形式化、"問題解決"與數學地思維等問題作出了辯證的分析。

關鍵詞: 建構主義, 數學教育

建構主義在數學教育領域中的興起已經有十幾個年頭了。儘管這既非一個有著明確目標的數學教育改革運動, 也不能被看成一個系統的數學教育理論, 但卻在這一領域中產生了十分重要的影響, 特別是, 在很多人看來, 建構主義更可被看成數學教育界在九十年代的主要口號, 另外, 建構主義的影響也已超出數學教育而擴展到了一般的教育領域。爲了清楚地指明建構主義對於數學教育的重要意義, 以下我們將首先從一般的角度對建構主義的新近發展及其教學涵義作出論述; 然後, 在第二部分中, 我們又將針對數學教育的特殊性對此作出進一步的分析。

一. 建構主義的新近發展及其教學涵義

1) 極端的立場或必要的 "互補"?

就建構主義在數學教育領域中的興起而言, 無疑應當首先提及"極端建構主義" (radical constructivism) 的觀點, 因爲, 儘管建構主義的基本論點在哲學中有著較長的歷史, 特別是, 瑞士著名兒童心理學家、哲學家皮亞杰更已明確地提出了建構主義的認識論; 但是, 卻又是所說的極端建構主義在此首先發揮了開路先鋒的作用, 並在一段時期內造成了"只有極端建構主義才是好的建構主義的影響" (J. Kilpartrick, 1987)。

具體地說, 除去對認識活動建構性質的直接肯定以外, 極端建構主義的一個主要特

徵就是在相關的哲學問題上採取了一種極端的立場, 也即是對傳統的本體論問題和認識論問題上採取了徹底否定的立場。例如, 這就正如極端建構主義的最主要代表人物 E. von Glasersfeld (1990) 所指出的: "建構主義的立場, 如果認眞對待的話, 即是與知識、眞理和客觀性等傳統概念直接相衝突的, 它們要求從根本上去重建個人關於實在的觀念。" 這也就是說, 第一, 我們完全不應去涉及客觀世界的存在性這樣一個"形而上學"的問題, 而只應局限於經驗知識範圍。第二, 認知是一個組織個人經驗世界的適應過程, 這也就是說, 我們應當用"適應"(fit) 的概念去取代傳統的"匹配"(match) 概念, 也即採取一種直接的工具主義立場。

正因爲極端建構主義對傳統的哲學問題採取了徹底否定的立場, 從一開始起就有不少學者從這樣的角度對極端建構主義提出了尖銳的批評。例如, 著名數學教育家 J. Kilpatrick(1987) 就曾這樣寫道: "極端建構主義是很極端, 因爲它拒絕大多數經驗主義者所支持的形而上學的現實主義, 它要求它的擁護者放棄知道眞實世界的努力。"另外, G. Goldin(1990) 則曾更爲明確地提出, 與極端建構主義的立場相對立, 我們應當採取"溫和的建構主義"(mederated constructivism), 而後者則就以"經驗主義的知識論"作爲直接的基礎。(在有關的論著中, 我們還可看到"素樸建構主義"、"經驗導向建構主義"和"簡單建構主義"等提法, 它們所採取的也都是這樣一種"經驗主義"[或者更爲恰當地說, 即是"實在論"] 的立場。)

然而, 如果說以上的論爭主要是從哲學的角度、特別是圍繞本體論問題展開的; 那麼, 從九十年代開始, 教育領域中由極端建構主義所引出的爭論則可說是轉移到了一個新的焦點之上。這就是指: 知識是否應當被看成純粹的個人建構, 或是社會的共同建構?

正是在這樣的意義上, 在當前我們即可看到所謂的"個人建構主義" (personal constructivism) 與 "社會建構主義"(social-constructivism) 的直接對立。具體地說, 個人建構主義事實上也可被看成建構主義的一種極端形式, 因爲, 其主要特徵即是對認識活動"個體性質"的突出強調, 並認爲應當把這看成一種高度自主的活動, 從而, "一百個學生就是一百個主體, 並會有一百個不同的建構"。與此相對立, 社會建構主義則認爲個人的認知活動 (包括智力的發展) 必然地是在一定的社會-文化環境中實現的, 而且, 所說的社會-文化環境對於個人的認知活動並有著重要的規範作用, 從而, 我們在此也就可以超越各個特殊個體而談及知識的客觀性 (或者說, 普遍性)。

與極端建構主義對於傳統哲學問題的否定一樣, 個人建構主義和社會建構主義也並非全新的觀點。例如, 就後者而言, 我們即應特別提及前蘇聯的心理學家 L. Vygotsky 的論著 (1978); 而這事實上也就是建構主義新近發展的一個重要特點, 即是對 Vygotsky 的有關論點人們給予了普遍的重視和高度的評價。例如, 這就正如英國學者 P. Ernest (1994b) 所指出的; "社會建構主義的一個共同出發點就是 Vygotsky 的理論。"

一般地說, 這事實上也就是大部分數學教育工作者現今所採取的一個普遍立場, 即是認爲應當明確肯定認識活動 “個體性質”與“社會性質”的互補性。例如, 這就正如 H. Bauersfeld (1992) 所指出的, 一個適當的基本立場應是“極端建構主義的原則⋯及對於社會維度在個人建構活動中的作用和教室中社會作用過程的一種整合的和互補的說明。” 顯然, 這即應被看成對於建構主義基本立場的重要發展或改進。

另外, 從理論的角度看, 筆者認爲, 我們在此又應淸楚地指明以下幾點:

第一, 相對於個人建構主義而言, 社會建構主義顯然是更爲合理的, 因爲, 如果我們絕對地去肯定認識活動的主觀性, 那麼, 就如數學哲學中對於直覺主義的批判所早已淸楚地表明了的 (鄭毓信, 1986), 最終就必然走向“數學唯我主義”或“數學神秘主義”, 而這當然是與數學的科學性直接相違背的。

但是, 應當強調的是, 筆者認爲, 除去“普遍性”這一涵義以外, 我們還應在一種更爲基本的意義上去肯定知識的客觀性, 也即應當明確肯定認識的客觀基礎。更爲一般地說, 這也就是指, 認識應當被看成建構和反映的一種辯證統一: 儘管就其直接形式而言, 認識是主體的主動建構, 或者說, 即是一個意義賦予 (sense making) 的過程, 但是, 歸根結蒂地說, 這種活動的目的則又在於如何正確地去反映客觀世界, 也即如何使得所建構起的意義能夠正確地反映事物的本質。

顯然, 在所說的意義上, 我們也就可以更爲淸楚地看出建構主義的積極意義: 這正是對於機械反映論的直接反對, 也即淸楚地表明了認識活動的能動性質。

第二, 即如上面所已指出的, 除去建構和反映的統一以外, 認識活動事實上也是“個體性”與“社會性”的一種辯證統一。這就是說, 在充分肯定認識活動個體性質的同時, 我們又應淸楚地看到認識並非一種純粹的個人行爲, 而必定是在一定的社會環境之中進行的, 從而, 我們也就應當明確地肯定認識活動的社會性質。

值得指出的是, 在一些學者 (例如, S.Lerman, 1994) 看來, 對於認識活動“個體性質”與 “社會性質”的這種整合必然地包含有內在的矛盾, 因爲, 任何社會性的外部作用, 即如個體間的相互交流、批評等, 最終都必需通過所謂的“內化” 才可能對各個主體的認識活動產生實際的影響, 而後者事實上就是一個“個體化”的過程, 從而也就是對於所說的認識活動的社會性質 (或者說, 知識的普遍性質) 的直接否定。

然而, 筆者認爲, 我們在此不應把所說的普遍性看成是一種絕對的同一性, 勿寧說, 這正是個體性與普遍性的一種辯證統一: 儘管各個個體的認識活動都有其一定的特殊性, 但是, 從整體上說, 在各個個體之間又必然地表現出一定的共同性, 特別是, 後者即就是社會規範性作用的一個直接後果, 並是與一定的動態過程直接相聯繫的。從而, 總的來說, 我們在此所看到的就是一種動態的平衡, 而非絕對的對立。

第三, 在充分肯定社會建構主義積極意義的同時, 我們也應淸楚地看到其在理論上

的局限性或不足之處。具體地說，除去上述關於建構與反映活動辯證關係的分析以外，我們在此並應特別提及“社會建構主義” 的一種極端形式，也即對於“權威和權力”在認識活動中作用的片面強調。例如，正是在這樣的意義上，一些學者 (例如，M. Foucault, 1980) 提出，與個人建構活動的自主性相對立，我們應當明確肯定社會機制的“收斂運作”，而又因爲後者主要地是依靠權威和權力這樣一些非理性因素實現的，因此，這也就清楚地表明了認識活動的非理性性質。

然而，筆者認爲，以上關於認識活動與客觀世界關系的分析事實上也已清楚地指明了非理性主義的錯誤性。具體地說，儘管我們可以、而且應當承認人們的認識活動必然地要受到其所處的社會-文化環境的影響，但是，又只是獨立存在的物質世界才構成了人們認識活動的最終淵源和依據，而且，認識的最終目的又在於對眞理的認識，從而，儘管在認識的過程中有許多對中心目的偏離，我們並可在一定程度上看到權力或權威等非理性因素在此發揮了重要的作用，但是，所有這些偏離又不可能走得太遠，並遲早都會被拉回到眞理的道路上。從而，從總體上說，我們即就應當明確地肯定認識、特別是科學活動的合理性。(對此並可參見曹天予, 1994)

2) 對於傳統教學思想的嚴重挑戰

就建構主義在數學教育、乃至一般教育領域中的影響而言，人們無疑特別關心它的教學涵義；然而，就一些初期的論文來看，有不少教育工作者在這一問題上似乎採取了一種頗爲“消極”的態度。這即是指，儘管他們也承認建構主義有著直接的教學涵義，但同時則又認爲這些結論並非建構主義所特有，從而事實上就只是一些“老生常談”。

例如，von Glasersfeld 曾依據自己的極端建構主義立場指明了其在教學上的五個重要結論: (1) 對於教學與訓練的明確區分; (2) 相對於外部的行爲我們應當更加重視學習者內在的思維過程; (3) 語言溝通並不能將知識直接傳遞給學生，而應是指導學生學習的過程; (4) 學生的錯誤應成爲了解學生思維的重要線索; (5) 應當充分肯定“教學面談” (teaching interview) 在教學中的重要作用。然而，也正是通過對這五個結論的具體分析，Kilpatrick(1987) 指出，“這五個結論 · · · 顯然也符合其它哲學的立場。”從而，“這種教學觀 (就) 並非建構主義者的專利。”

就教學上的具體建議而言，筆者認爲，Kilpatrick 的上述結論確實有一定的道理；但是，我們同時則又必須清楚地看到這樣兩點:

第一，純粹的經驗之談並不能等同於理論指導下的自覺實踐。

事實上，這本身也就是一個人所皆知的眞理，即感覺到了的東西我們不一定能正確地認識它，而只有認識了的東西我們才能更爲深刻地去感覺它。一般地說，這顯然也就清楚地指明了自覺的理論學習對於改善教學的特殊重要性，特別是，只有上升到了應有的理論高度，相應的教學實踐才可能成爲一種眞正的自覺行動。

第二, 相對於教學上的具體建議而言, 建構主義更體現了一種基本的理論立場或教學思想。

具體地說, 這首先就是指對於教學理論的自覺反思和徹底批判。這就如 N. Noddings(1990) 所指出的, “建構主義的特殊力量就在於使我們對教學過程作出批判性和具有想像力的思考。相信建構主義的前提, 這就使得我們不再單純地去尋找解答, 而是擁有了可以借以對教學方法的可能選擇作出判斷的有力準則。”

其次, 也正是通過所說的自覺反思和徹底批判, 我們即可淸楚地看到: 建構主義並非簡單的“老生常談”, 而是構成了對於傳統教學思想 (更爲一般地說, 即是傳統敎法設計理論) 的嚴重挑戰。

以下我們就集中地對建構主義的這種“革命性”涵義作出進一步的分析。

首先, 作爲對於傳統敎法設計理論基礎的自覺反思, 人們現已普遍地認識到, 傳統的敎法設計理論主要地即是以行爲主義心理學、尤其是斯金納的學習理論爲基礎發展起來的, 特別是, 以下即就是其最爲基本的指導思想: 教學工作就是要通過提供適當的強化以控制相應的學習過程、從而獲得所希望的教學結果 (更爲準確地說, 即是提高獲得所期望的教學結果的概率 [可能性])。

從而, 如果結合行爲主義的主要特徵進行分析, 我們就可看出, 傳統的敎法設計理論事實上包括了這樣一些基本的理論前提:

(1) 關於知識的客觀主義 (objectivism) 觀點; (2) 關於知識的還原主義 (reductionism); (3) 關於教學活動的決定論觀點 (determinism); (4) 敎法的控制性質。

對於傳統敎法設計理論的上述基礎人們早就從各種不同的角度提出了批評。例如, 從知覺的整體性出發, 格式塔心理學家們就對關於知識的還原主義立場提出了尖銳的批評; 另外, 由於關於教學活動的決定論觀點完全抹殺了學生的個體差異 (或者說, 這種差異只是被局限於各個學生在準備知識掌握程度上的不同), 因此這一觀點也遭到了普遍的批評。但是, 從整體上說, 這種早期的批評主要地又只是一種修正性的工作, 即是力圖對傳統的敎法設計理論作出必要的修正或改進; 與此相反, 現今所出現的則是對於傳統敎法設計理論基礎的徹底否定, 而這主要就來自建構主義的挑戰。

當然, 建構主義並非一個孤立的發展, 而是與其它方面的研究直接相呼應的, 特別是, 我們在此即應淸楚地看到心理學的研究由行爲主義轉向認知心理學所造成的重要影響。

事實上, 即使就一些具體問題而言, 我們就可淸楚地看到在認知心理學與傳統的敎法設計理論之間所存在的重要差別或不相容性。例如, 與所說的還原論傾向相對立, 認知心理學的一個重要特徵就是對於認知結構整體性質的突出強調, 而這顯然也就是對於知識整體性的直接肯定; 另外, 近年來關於“情境認知”(situated cognition) 的研究則又淸楚地表明了知識的環境相關性或知識的社會-文化性質, 從而也就對上述關於知識的“客觀主義”觀點提出了嚴重的挑戰。

然而, 相對於這種局部的批判而言, 建構主義則可說是構成了對於傳統教法設計理論基礎更爲全面和徹底的否定。也正因爲此, 在一些學者 (例如, P. Cooper, 1993) 看來, 我們就可把“行爲主義”、“認知心理學” (或者說, “認知主義”) 和“建構主義”看成三個不同的相繼階段。

具體地說, 儘管“建構主義”並不能被看成一個高度統一的理論, 而是包括有多種不同的觀點, 但是, 所有這些不同的觀點又有著明顯的共同點, 即都明確肯定了學習是學習者以已有的知識和經驗爲基礎的主動的建構活動。顯然, 這種關於學習活動主動建構性的斷言即是與傳統教法設計理論的控制性質直接相對立的; 另外, 由於學習者的個體差異 (這不僅是指已有的知識, 而且還包括了認知風格、學習態度、信心、觀念、學習動機等多種成分) 在建構主義的立場中得到了直接的反映, 所說的主動建構性、特別是新的學習活動與學習者已有知識和經驗的直接相關性則又淸楚地表明了學習活動的動態性質, 因此, 這也就構成了對傳統教法設計理論的決定論觀點的直接否定; 最後, 認識活動的建構性質顯然也就表明了知識不應被看成純客觀的、中性的, 勿寧說, 其中也必然地“滲雜”有一定的“人性”的成分。

從而, 總的來說, 建構主義就構成了對於傳統教法設計理論基礎的直接否定。也正因爲此, 在不少學者 (例如, J. Lowyck & J. Elen, 1993) 看來, 我們現今所面臨的就是“教法設計中的範式轉變”或“教法設計理論基礎的根本性變革”, 或者說, 今天的迫切需要即是“對於教法設計的重新認識” (reconceptualization)。

顯然, 與前述的“消極”態度相比, 後一認識是更爲正確的; 然而, 應當強調的是, 筆者認爲, 我們在此也應防止由一個極端走向另一個極端, 也即應當反對由於採取了極端的立場而認定教法設計理論 (注意: 這不僅僅是指傳統教法設計理論) 乃至全部的教學工作都根本不具有任何的積極意義。

具體地說, 正如前面所已指出的, 這正是極端建構主義的一個重要特徵, 即是在絕對的意義上肯定了認識活動個體特殊性: 每個人都是以自己的特殊方式 (idiosyncratic ways) 去認識世界的。特殊地, 由於學習活動作爲主體在特定環境之中所進行的意義賦予無疑具有個體的特殊性, 並是因時、因地而異的, 因此, 在持有這種觀點的人看來, 學習活動的進程和結果就完全不可預期, 也即沒有任何嚴格意義上的規律性可言; 進而, 又由於學習活動被看成純粹的個人行爲, 因此, 任何規範性的教學活動就不僅不可能達到預期的目的, 而且也沒有任何積極的作用, 恰恰相反, 這種外部干涉只可能起到消極的干擾作用。從而, 在這樣的意義上, 極端建構主義即就意味著“教法設計的死亡”!

當然, 上述的極端立場是不可能爲人們所普遍接受的; 但是, 筆者以爲, 我們在此又不能停留於“ 不現實”、“過激”等素樸的批評, 而應從理論的高度去作出深入的分析。事實上, 由前面的論述我們已經知道, 極端建構主義不僅不應被看成建構主義的唯一可能形式, 而且, 這種極端形式在理論上並有

著嚴重的局限性或錯誤性。特殊地, 就目前的論題而言, 我們則應特別強調在認識活動的個體性與社會性、以及個體的特殊性與普遍性之間的所存在的辯證關係。

具體地說, 儘管每個人的學習活動都有其各自的特殊性, 但是, 從總體上說, 各個個體之間又必然有著一定的共同性, 而後者則就構成了教學規律的根本依據, 這也就是說, 學習活動不應被看成完全不可預期和沒有規律的。(當然, 所說的教學規律又並非機械的法則, 即如我們只需嚴格按照事先指定的步驟去進行教學就可獲得預期的結果; 與此相反, 我們在此必須充分注意個體的特殊性。顯然, 後者事實上也就淸楚地表明了教學活動的創造性、能動性。) 另外, 認識活動的社會性質顯然也就淸楚地表明了教學作爲一種規範性活動的合理性, 特別是, 這更不應被看成是與認識活動的主動建構性直接相矛盾的, 勿寧說, 前者正是後者能得以不斷深化和發展的一個必要條件。(類似地, 作爲問題的另一方面, 我們又應強調指出, 這裡所說的規範化又並非是指通過外部的控制去達到絕對的統一性, 恰恰相反, 教學活動的規範性就是要有效地去促進學生對於知識的建構, 特別是, 我們即應淸楚地去揭示相應的思維活動的合理性, 從而使學生的學習成爲一種自覺的理性行爲, 即是建立在淸醒的自我意識、自覺的反思和理性的選擇之上。)

綜上可見, 我們現今所面臨的就並非“教法設計的死亡”, 而應是“教法設計的重建”; 另外, 實現後一目標的關鍵則又在於我們必須正確地去認識和處理在建構與反映、認識活動的個體性與社會性、知識的客觀性與主觀性、個體的特殊性與普遍性、教學活動的規範性和學生的自主性等諸多因素之間所存在的辯證關係。

二. 建構主義與數學教育

以上我們從一般角度指明了建構主義的教育涵義; 一個容易想到的問題是: 什麼又是建構主義對於數學教育的特殊意義? 或者說, 是否存在有這樣的特殊意義?

事實上, 就建構主義在教育領域中的興起而言, 應當說與數學教育的特殊性有著密切的聯繫。例如, von Glasersfeld 主要地就是依據數學教學的實踐發展起了自己的極端建構主義。另外, 更爲一般地說, 這又正如 Kilpatrick(1987) 所指出的, “建構主義 ··· 似乎對數學教育家的思考與活動有特別強烈的衝擊。這些衝擊大多數無疑地是由於我們對於數學和數學學習的觀點所造成的。”然而, 就發展的主流而言, 建構主義與數學教育的這種特殊聯繫卻似乎越來越淡化了。例如, 就數學教育家現今所撰寫的關於建構主義的大多數論著而言, 在其中都很少能夠看到關於數學教育特殊性的任何論述。

當然, 這種由特殊到一般的發展應當說是有其很大合理性的, 因爲, 作爲一種認識論, 建構主義顯然具有超出數學教育這一特殊範圍的普遍意義, 另外, 又正如以上的分析所已表明的, 我們也只有從這種更爲廣泛的角度去進行分析, 才能達到更大的理論高度。但是, 從數學教育的角度看, 這又的確是

一個十分自然的願望, 即是希望建構主義與數學教育之間的聯繫能變得更為密切一些。

以下就是後一方向上的一個初步探討。

1) 從數學的本體論問題談起

儘管對於本體論問題的徹底排斥正是極端建構主義的一個主要特徵, 但是, 筆者認為, 為了清楚地認識建構主義對於數學教育的特殊意義, 我們又必須從數學的本體論問題談起。

事實上, 這也正是數學相對於一般自然科學的一個重要差異, 即與一般自然學科的研究對象不同, 數學對象並不能被看成現實世界中的眞實存在。例如, 誰曾見到過一, 我們只能見到某一個人、某一棵樹、某一間房, 而決不會見到作為數學研究對象的眞正的"一"(注意, 在此不應把"一" 的概念與其符號相混淆)。從而, 即使就最簡單的數學對象而言, 也都是抽象思維的產物。但是, 在數學中我們所從事的顯然又是一種客觀的研究, 例如, 我們既不能隨意地把 7 說成是 4 與 5 的和, 也不能毫無根據地去斷言哥德巴赫猜想的眞假。從而, 我們在此似乎就陷入了一種兩難的處境, 而這事實上也就是多年來一直困擾著數學哲學家的一個難題: 我們究竟應當如何去看待數學對象的實在性問題?

筆者認為, 建構主義事實上即已為數學的本體論問題提供了一個合理的解答: 數學抽象就其本質而言是一種建構的活動: 數學對象正是通過這樣的活動得到了建構。

具體地說, 作為數學建構活動的具體分析, 我們在此首先即應明確肯定這種活動的形式特性: 數學對象是借助於明確的定義得到建構的, 而且, 在嚴格的數學研究中, 無論所涉及的對象是否具有明顯的直觀意義, 我們又只能依據相應的定義和明確給出的規則去進行推理, 而不能求助於直觀。從而, 即使某個數學概念在最初只是某一個人的"發明創造", 但是, 一旦這一對象得到了"建構", 它就立即獲得了確定的"客觀內容", 對此即使其"發明者"也只能客觀地加以研究, 而不能再任意地加以改變。從而, 數學抽象活動的形式特性就實際地保證了數學對象由主觀的"心智建構"(mental construction) 向相對獨立的"心智對象"(mental entity) 的轉化。

其次, 就如以上關於認識活動社會性質的分析, 我們在此也應清楚地看到數學建構活動的社會性質, 特別是, 個人的創造必須取決於相應的社會共同體 ("數學共同體") 的"判決": 只有為數學共同體所一致接受的數學概念 (以及方法、問題等) 才能眞正成為數學的組成成分。從而, 數學對象也就不能被看成純粹的個人建構, 而是數學共同體的共同建構, 或者說, 正是由個體向群體的轉移直接促成了數學對象由所說的"心智對象"向"客觀對象" (objective entity) 的進一步轉化。(關於數學建構活動的社會性可參見 Ernest, 1991; 鄭毓信, 1995a)

以上關於數學抽象活動建構性質的分析顯然有著重要的教學涵義, 特別是, 這就更為清楚地表明了數學學習活動的建構性質: 由於數學概念除相應的符號外並不具有直接

的物質表現, 因此, 數學對象的認識首先就是一個建構的過程, 這也就是說, 如果我們不能在思想中實際地去建構出相應的對象, 也即使"外化"了的對象重新轉化爲思維的內在成分, 則就不可能獲得眞正的數學知識。

2) 數學觀的根本性變革

以上關於數學建構活動社會性質的分析事實上也爲我們深入理解數學的本質提供了一個新的視角, 即數學不應被等同於事實性結論的匯集, 而應主要地被看成人類的一種創造性活動。

具體地說, 這也就是所謂的"數學活動論"(Kitcher, 1984; 鄭毓信, 1991) 的主要內容。首先, 如果我們不再唯一地著眼於數學活動的最終產物, 而更加注重於對過程本身的深入分析, 那麼, 一個直接的結論就是: 由於數學活動包括有問題、方法、語言等多個環節, 因此, 數學就不應被等同事實性結論的匯集, 而應被看成一個由"問題"、"方法"、"語言"、"命題 (事實性結論)" 等多種成分所組成的一個複合體。

其次, 更爲重要的是, 我們在此又應清楚地看到以下的事實: 在現代社會中, 數學家們總是作爲相應的社會共同體的一員來從事自己的研究活動的, 也即必然地處在一定的社會規範之下, 又由於這往往是一種不自覺的行爲, 因此在很大程度上就可被歸結爲傳統的力量, 這也就是說, 每個數學家無論其自覺與否總處在一定的數學傳統之中, 也即是按照一定的數學傳統來從事自己的研究活動的。

從而, 如果把前述的 "問題"、"方法"、"語言"、"命題" 等統稱爲"數學的知識成分", 那麼, 以上關於數學傳統的分析則就從一個更爲廣泛的角度指明了數學 (活動) 的"內涵", 這就是說, "數學傳統" 作爲"數學的觀念成分" 也應被看成數學的一個重要組成成分。

容易看出, 上述關於數學活動社會性質的分析與現代"科學-技術-社會"(STS) 的研究取向是十分一致的; 另外, 就數學本身而言, 這則又直接涉及到了數學觀的根本性變化, 而這事實上也就是數學哲學現代發展的最主要特點 (鄭毓信, 1995b), 即動態的、易謬的 (或者說, 經驗和擬經驗的) 數學觀現已逐漸取代傳統的靜態的、絕對主義的數學觀在數學中占據了主導的地位。

顯然, 數學觀的上述變化也有著重要的教育涵義, 特別是, 從動態的角度看, "數學的觀念成分"顯然比"數學的知識成分"更爲重要, 從而, 我們也就應當將傳統的繼承看成數學教育的一個基本目標, 這也就是說, 與具體知識內容的學習相比, 我們應當更加重視如何去幫助學生學會數學地思維。

3) 建構主義與數學教學

以上的論述可以說主要屬於數學哲學的範圍, 但這顯然又不能被認爲是與實際的數學教學活動完全無關的, 恰恰相反, 就如數學家總處在一定的數學傳統之中, 數學教師無論其自覺與否也總是在一定觀念指導下從事自己的教學活動的。特殊地, 由以上的論述我們也就可以清楚地看出, 以下幾個問

題即可被認爲對於數學教學有著特別重要的意義, 或者說, 這即可被看成建構主義對於數學教學特殊意義之所在:

(1) 意義賦予與文化繼承

以上已經指明了建構活動對於數學學習的特殊重要性, 這就是指, 如果我們不能首先在思想中實際地去建構出相應的對象, 則就不可能獲得任何眞正的數學知識。然而, 應當強調的是, 所說的建構活動又不能簡單地被理解爲如何在頭腦中機械地去重複有關對象的形式定義, 勿寧說, 這主要是一個意義賦予的過程, 也即如何把新的概念與主體已有的知識和經驗聯繫起來, 從而使之成爲可以理解的和有意義的。

從而, 就抽象的數學概念而言, 所說的"意義賦予"事實上就包含有 "具體化"(visualization) 的涵義, 即是如何使抽象的數學概念與主體已有的經驗或知識聯繫起來, 從而成爲"十分直觀明了"的東西。(當然, 對於這裡所說的"具體"和"抽象" 我們必須作相對的理解。這就正如著名數學家 R. Courant 所指出的:"一個人必須牢記, '具體'、'抽象'、'個別'和'一般'這些術語在數學中沒有穩定的和絕對的含義。它們主要涉及一個思想框架, 一個知識狀態以及數學本體的特徵。例如已被列爲熟悉的事物很容易被看作具體的。"載「數學家談數學本質」, 北京大學出版社, 1989年, 第121頁。) 另外, 除去由"抽象"向"具體"的過渡以外, 這常常又包含有由現象到本質、由局部到整體的過渡, 也即是從整體上建立起了關於對象本質的深入認識。

顯然, 相對於數學概念的外在表現形式–符號–而言, 所說的"意義賦予"也可說是一個"解釋"(interpretation) 的過程, 從而, 解釋的問題對數學的學習和教學活動來說就可被認爲具有特別的重要性, 特別是, 從建構主義的角度看, 我們在此即就應明確肯定解釋活動的個體特殊性。這也就如 Ernest(1994b) 所指出的: "建構主義的中心論題之一即是個體的解釋。" "沒有任何一種意義能如此地得以傳遞, 以保證解釋的唯一性。"

當然, 就數學學習活動而言, 又存在有一個如何依據數學概念的"社會意義" 去對各個個體經由相對獨立的建構活動所獲得的"個體意義"進行調整的過程。從而, 相對於意義賦予而言, 數學學習同時也是一個"文化繼承"的過程。這也就是說, 數學學習不僅是一種"解釋"的活動, 而且也是一個對數學對象的社會意義進行"理解"的過程。這也就如 van Oers 所指出的, 數學學習即是對由文化歷史所傳遞給我們的數學作出意義賦予的過程。

綜上可見, 數學知識的建構即是"個人意義"和"社會意義"的一種整合。這也就是說, 儘管數學學習在一定意義上即是一個規範化的過程, 也即是要通過適當的途徑將"個人意義"統一到相應的"社會意義", 但是, 這又並非是一種絕對的統一, 勿寧說, 不同的個體在此仍然具有一定的自由度, 即如同一個數學概念在不同的個體那裡完全可能具有不同的心理表徵; 另外, 所說的整合又是一個動態的過程, 即必然地包括有一個發展、調

整、變化甚至是反復的過程, 特別是, 我們在此更應淸楚地看到所已得到建立的認識 (包括錯誤觀念) 的頑固性。

顯然, 上述的分析事實上也就淸楚地表明這樣一點: 與單純的“解釋”相比, 以下的問題對於數學的學習和教學來說是更爲重要的, 即我們必須特別注意如何去處理好上述的“解釋”與“理解”、也即 “意義賦予”與“文化繼承”的關係。

(2) 形式化與非形式化

依據以上的論述, 我們也就可以對數學教學中的形式化與非形式化的關係問題作出如下的進一步分析:

首先, 我們應當明確地肯定數學的形式特性。這也就是指, 數學並非對於眞實事物或現象的直接研究, 而是以抽象思維的產物作爲直接的研究對象。也正是這樣的意義上, 我們即可以明確地提出如下的“模式建構形式化原則”(鄭毓信, 1990): 在數學的研究中, 應當借助於明確的定義去構造出相應的量化模式, 並以此爲直接對象從事純形式的研究。

其次, 我們又應強調指出, 無論就數學教學或數學研究而言, 過分地強調形式化的作法都是不足取的, 因爲, 就如前面所已指出的, 數學的認識作爲一種建構活動即是一個意義賦予的過程, 特別是, 其中必然地包含有由“抽象”向“具體”的過渡。

也正是在這樣的意義上, 筆者以爲, “淡化形式, 注重實質”這一主張 (陳重穆, 1993) 就有著十分重要的意義。這也就是說, 我們應當反對對形式上完美性的片面追求, 即如什麼都要來個定義, 分類則又務需作到不重不漏等; 與此相反, 我們應當“淡化形式”, 也即應當允許非形式化, 特別是, 我們應當“淡化概念,”, 也即“不要把形式化的概念放在最前”, 不要把概念看成是“百分之百的不可變動、神聖不可侵犯”, “不要單純在概念本身上下功夫”, 而應把重點放在對實質的領悟上。

第三, 與單純地強調“淡化形式”相比, 我們更應淸楚地看到在形式與非形式之間所存在的辯證關係。

具體地說, 這首先就是指形式與非形式的相對性。例如, 正如上面所已提及的, 即使就 $1 + 2 = 2 + 1$ 這樣的簡單等式來說, 事實上就已充分體現了數學的形式特性; 然而, 與前者相比, $a + b = b + a$ 顯然又達到了更高的抽象層次, 從而, 在這一層次上, $1+2=2+1$ 也就可以被看成“十分直觀明瞭的”。

再者, 數學的無限發展事實上即可被看成是在形式化與非形式化的辯證運動中得以實現的 (鄭毓信, 1995b), 特別是, 這又不應被看成一個單向的運動, 而是在不斷上升到更高抽象程度的同時也包括了由“形式”向“非形式”的過渡或轉變。由於數學的學習活動在一定意義上即可被看成數學歷史發展過程的一個“縮影”, 因此, 這也就十分淸楚地表明了: 數學思維的發展就只有通過對於“形式”與“非形式” 的不斷調和和整合才能眞正得以實現。

綜上可見, 在數學教學中我們也就不應片面地去強調其中的任何一個方面, 而應根

據學生的認知水平認眞地去處理好形式化與非形式化的辯證關係, 特別是, 我們既應善於爲抽象的數學概念建構起具體的"心理意義", 同時則又應當善於從抽象的高度去把握具體的對象。

(3) "問題解決"與數學地思維

最後, 我們再來對"問題解決" (problem solving) 這一口號作一具體分析。由於這正是數學教育界在八十年代的主要口號, 即是認爲應當以"問題解決"作爲學校數學教育的中心, 因此, 這一討論就有著重要的現實意義。

首先, 筆者認爲, "問題解決"這一數學教育改革運動確實有其一定的合理性。具體地說, 除去時代的要求和數學觀的變革這樣一些更爲廣泛的考慮 (鄭毓信, 1993), 建構主義也可說是爲此提供了直接的論據, 因爲, 如果我們堅持學習是主體主動的建構這樣一個基本的立場, 那麼, 一個必然的結論就是: 最好的學習方法就是動手去作。就數學學習而言, 這也就是指, "學數學就是作數學 ("knowing" mathematics is "doing" mathematics)", 也即我們應當讓學生通過" 問題解決"來學習數學。因爲, 這不僅使學生眞正處於主動的地位, 並可通過積極的探索去建立自己的理解和意義, 而且, 由於這事實上就是把學生擺到了與數學家同樣的位置之上, 因此, 除去具體數學知識和技能的學習以外, 這就更爲有利於數學觀念 (或者說, 數學傳統) 的養成, 再者, "問題解決"顯然也有助於同學間的合作和相互促進, 而由認識活動的社會性我們已經知道, 這也正是成功的學習活動的一個必要條件。

一般地說, 這事實上也就是所謂的"活動導向教學" (an activity approach) 何以在現代獲得普遍重視的重要原因。然而, 從教學的角度看, 在此顯然又存在這樣的問題, 即是應當如何去處理好"問題解決"與基本知識和技能的學習這兩者之間的關係? 另外, 數學教育界更經由對這些年來"問題解決"的教學實踐進行反思而得出了這樣的共識: "數學教育應當'過程'與'結果'並重" (黃毅英, 1993)。顯然, 這事實上就表明"問題解決"這一口號也具有一定的局限性或不足之處。

爲了清楚地說明問題, 我們在此即可考慮這樣一個問題: 數學活動是否就"等同於""問題解決"?

顯然, 作爲一種直接的回答, 我們即應指出, 除"問題解決"以外, "問題提出" (problem posing) 也應被看成數學活動的一個重要組成成分; 另外, 從更爲深入的角度看, 這一問題則又直接涉及到了這樣的一個基本事實, 即數學家們總是不滿足於某些具體結果或結論的得出, 並總是希望能獲得更爲深入的理解, 而這不僅直接導致了對於嚴格的邏輯證明的尋求, 而且也促使數學家積極地去從事進一步的研究, 即如在這些看上去並無聯繫的事實背後是否隱藏著某種普遍的理論? 這些事實能否被納入某個統一的數學結構? 等等; 他們也總是希望能達到更大的簡單性和精緻性, 即如是否存在更爲簡單的證明? 能否對相應的表述方式 (包括符號等) 作出適當的改進? 等等。

容易看出, 數學家的上述行爲正是“數學傳統”的一種直接表現。這也就是說, 數學家們之所以不滿足於已有的工作, 並總是希望通過新的研究去發展和深化認識, 即如達到新的更大的普遍性、更大的嚴格性、新的更高層次上的和諧性等, 主要就是由於傳統的力量。從而, 上述的事實上也就是與前述關於數學本質的新的認識完全一致的, 即數學不應被等同於各種具體的知識和技能, 而主要地應被看成人類的一種創造性活動, 一種在特定傳統指導下的活動。

也正是出於這樣的考慮, 一些數學家對現行數學教育中所出現的一些偏向提出了尖銳的批評。例如, 爲了使數學對大多數學生來說成爲更有吸引力和力所能及的, “開放性問題” 在現代的數學教育中得到了廣泛的應用, 因爲, 普遍認爲, 與具有唯一正確解答、甚至唯一正確解題方法的“傳統問題”相比, 開放性問題更適於使所有的學生參與到解題活動之中: 他們可以依據各自的水平去進行求解。但是, 在實踐中卻又經常可以看到這樣的現象, 即學生們 (甚至包括教師) 只是滿足於用某種方法 (包括觀察、實驗和猜測) 求得了問題的解 答、而不再去作進一步的思考和研究, 甚至未能對所獲得結果的正確性 (包括完整性) 作出必要的檢驗或證明。從而, “在現實中, 開放性問題在某些場合正在成爲不求甚解和不加檢驗的猜測的同義詞。” 上述的情況當然引起了數學家們的嚴重不安, 特別是, “儘管這一討論僅限於開放性問題, 但對於新改革的某些方面的大致了解已經使數學家對數學教育的前進方向產生了疑慮。” (詳可見鄭毓信, 1994)。

當然, 我們並不能因爲在實踐中出現了一些偏差就對新的改革運動持絕對否定的態定; 但是, 在筆者看來, 這又的確從一個側面清楚地表明了“問題解決”的局限性。這就是指, 與單純地強調“問題解決”相比, 我們應當更爲明確地提出這樣的主張: “求取解答並繼續前進”(A. Schoenfeld, 1994)。更爲一般地說, 這也就是指, 我們應當把幫助學生學會數學地思維看成數學教育的主要目標。從而, 與“問題解決”相比, “數學地思維”就是一個更爲恰當的口號。

綜上可見, 這正是搞好數學教學的關鍵所在, 即我們必須堅持必要的理論高度, 同時則又應當注意處理好在一般教學與數學教學之間所存在的辯證關係。顯然, 本文也就是這一方向上的一個努力。

參考文獻

1. Bauersfeld, H. (1992), Classroom culture from a social constructivist's perspective, Educational Studies in Mathematics, 23, 467-81.
2. Cobb, P. (1994), Constructivism and Learning, in Husen, T.& Postlethwaite (eds), The International Encyclopedia of Education, Oxford: Pergamon.
3. Cooper, P. (1993), Paradigm Shift in Designed Instruction: From Behaviorism to Cognitivism to Constructivism, Educational Technology, 1993, May, 12-19.
4. Davis, R. & Maher, C. & Noddings (1990) (eds), Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, NCTM.
5. Ernest, P. (1991), The Philosophy of Mathematics Education, London: The Falmer Press.
6. Ernest, P. (1994a) (eds), Mathematics, Education and Philosophy: An International Perspective, London: The Falmer Press.

7. Ernest, P. (1994b) (eds), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education, London: The Falmer Press.
8. Foucault, M. (1980), Power/Kowledge, New York: Pantheon Books.
9. Goldin, G. (1990), Epistemology, Constructivism, and Discovery Learning Mathematics, in Davis, R. & Maher, C. & Noddings, N. (eds), Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, NCTM, 31-47.
10. Kelly, G. (1955), The Psychology of Personal Constructs, Vol. 2, New York: Norton.
11. Kilpatrick, J. (1987), What Constructivism might be in Mathematics Education, in Bergeron, J. & Herscovics, N. & Kieran, C. (eds), Proceedings of the 11th International Conference of PME, Montreal: University of Montreal, 2-27.
12. Kitcher, P. (1984), The Nature of Mathematical Knowledge, Oxford Un- iver. Press.
13. Lerman, S. (1994), Articulating Theories of Mathematics Learning, in Ernest, P. (eds), Constructing Mathematical Knowledge: Epistemology and Mathematics Education, 41-49.
14. Lowyck, J. & Elen, J. (1993), Transitions in the Theroetical Foundation of Instructional Design, in Duffy, T. & Lowyck, J. & Jonassen, D. (eds), Designing Environments for Constructive Learning, Springer-Verlag, 213-30.
15. Noddings, N. (1990), Constructivism in Mathematics Education. in Davis, R. & Maher. C. & Noddings N. (eds), Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, NCTM, 7-18.
16. Schoenfeld, A. (1994) (eds), Mathematical Thinking and Problem Solving, Lawrence Erlbaum Associates.
17. Von Glasersfeld, E. (1990), An Exposition of Constructivism: Why Some Like it Radical, in Davis, R. & Maher, C. & Noddings, N. (eds), Constructivist Views on the Teaching and Learning of Mathematics, NCTM, 19-25.
18. Von Glasersfeld. E. (1995), Radical Constructivism: A way of Knowing and Learning, London: the Falmer Press.
19. Vygotsky, L. (1978) Mind in Society, Harverd Univer. Press.
20. Winn, W. (1993), A Constructivist Critique of the Assumptions of Instructional Design, in Duffy, T. & Lowyck, J. & Jonassen D. (eds), Designing Environments for Constructive Learning, Springer-Verlag, 189-212.
21. 曹天予 (1994), 社會建構論意味著什麼? 自然辯證法通訊, 1994年第四期。
22. 鄭毓信 (1986), 西方數學哲學, 人民出版社。
23. 鄭毓信 (1990), 數學抽象的基本準則: 模式建構形式化原則, 數學通報, 1990年第十一期。
24. 鄭毓信 (1991), 數學方法論, 廣西教育出版社。
25. 鄭毓信 (1993), “問題解決”與數學教育, 數學傳播, 1993年第四期。
26. 鄭毓信 (1994), 關於大衆數學的反思, 數學教育學報, 1994年第二期。
27. 鄭毓信 (1995a), 數學教育哲學, 四川教育出版社。
28. 鄭毓信 (1995b), 數學哲學中的革命, 哲學與文化, 1995年第八期。
29. 陳重穆、宋乃慶 (1993), 淡化形式、注重實質, 數學教育學報, 1993年第二期。
30. 黃毅英 (1993), 數學教育目的性之轉移, 數學傳播, 1993年第三期。

—本文作者任教於南京大學哲學系

回憶潘承洞

王　元

陳景潤才走了一年多, 潘承洞又走了。留下了一片空白, 一片淒涼。

我是1952年在浙江大學畢業, 由政府分配到中國科學院數學研究所工作的。1953年秋進入數論組, 師從華羅庚先生研究數論。承洞正是52年考入北京大學數學系。54年, 他選擇了閔嗣鶴先生的數論專門化。這時, 我們成了同行, 就認識了。他剛20歲, 我比他大4歲。數學所數論組還有越民義, 許孔時, 吳方, 魏道政及進修教師嚴士健與任建華, 56年又調來了陳景潤。北大數論專門化還有尹文霖, 邵品琮與侯天相。早在西南聯大時期, 閔先生就是華先生的助手與合作者, 所以兩個攤子都搞解析數論, 彼此關係很親密。閔先生鼓勵他的學生多與數學所數論組的人交流, 多向華先生學習。他們常來數學所參加華先生領導的哥德巴赫猜想討論班, 得到了華先生的指導與熏陶。數學所數論組的年輕人也把閔先生看成老師, 常向他請教。

承洞性格開朗, 心胸開闊, 襟懷坦白。他還有一大優點, 就是淡泊名利, 不與人爭。這在數學界是有口皆碑的, 所以他有衆多朋友, 我很喜歡與他交往, 我們愈來愈熟了, 彼此感到在一起時很舒暢。

承洞於1956年以優異的成績畢業, 繼續留校做研究生。承洞很有才華, 在他做學生的時候, 就有突出的表現: 命 D 與 ℓ 爲兩個互素的正整數。又命以 ℓ 爲首項及 D 爲公差的等差數列中的最小素數爲 $P(D,\ell)$, 蘇聯科學院院士林尼克於1944年證明了 $P(D,\ell)$ 的上界囿於 D^C 的著名定理, 其中 C 是絕對常數。承洞於56年定出 $C\le 5446$。其後的四十年中, 引起了國內外不少著名數學家從事於 C 的估計的改進, 他們的論著中總是要引用承洞最初的結果的。

接著"反右鬥爭"之後, 就是"大躍進"。58年夏天又開展了以批判武漢大學數學系黨總支書記齊民友而引發的所謂"拔白旗, 插紅旗"運動。景潤作爲一個最"頑固"的"小白旗" 被調到大連化學所去從事他所不懂的專業。直到幾年之後, 才被"落實政策"調回數學所工作。數學所數論組的其他人也都受到衝擊, 說他們搞"理論脫離實際"的東西。哥德巴赫猜想更被說成是"洋人, 古人, 死人" 的"垃圾"。他們紛紛改行了。轟轟烈烈的數論研究就這樣沉靜下去了。誠如華老在紀念熊慶來先生的詩中所說: "惡莫惡於除根計"。

當時, 承洞是在校研究生, 他還繼續他的學業。這時有一個大學部的學生李淑英跟他相愛。幾年後, 他們喜結良緣, 始終感情很好。承洞與我仍常見面, 當然在一起呆的時間不會很長。

60年, 承洞研究生畢業了。像他這樣可能已被劃歸爲內部掌握的“白旗”了。北京沒有單位要他。他被分配到濟南山東大學去工作。我爲他離開北京良好的研究環境而難過, 我們依依相別了。

幸好山大領導不但未歧視他, 而且還相當看重與照顧他。使他能在山大繼續從事“理論脫離實際”的解析數論研究工作。這時他已被哥德巴赫猜想迷住了。

首先是匈牙利數學家瑞尼於1947年證明了 $(1, C)$, 即每個充分大的偶數都是一個素數與一個不超過 C 個素數的乘積之和。哥德巴赫猜想本質上就是 $(1, 1)$, 但 C 的上界是什麼? 若用瑞尼的方法來計算 C, 這將是一個天文數字, 沒有人願意幹。

承洞天才地洞察到瑞尼關於 $(1, C)$ 的證明實質上依賴於一條素數分布的中值公式, 其中有一個參數 z。而 C 的值則依賴於 z。z 愈大, 則 C 愈小。按瑞尼的方法, z 是非常小的。承洞對這個問題作了重大改進, 證明了 $z = 1/3$ 時, 這一中值公式就成立, 並導出了 $(1, 5)$。承洞那時非常著迷。他給我的信件很多, 將他的結果不斷告訴我。當一個數學家做過一件工作而受到阻礙後, 往往輕易不會相信這件工作還會有進展, 這是對自己的迷信與偏見。我在證明了 $(2, 3)$ 之後, 就陷入這種思維的怪圈之中。所以我不相信承洞的結果, 每每予以反駁, 承洞再加以解釋, 彼此的信都寫得很長。最後在無可爭辯的情況下, 還是承認了承洞的 $(1, 5)$。這段時間, 承洞總共給我寫了六十幾封信, 淑英大概只收到了兩封信, 可見其拼搏之激烈。

正當我承認了 $(1, 5)$ 後不久, 我又收到了蘇聯數學家巴爾巴恩寄來的論文。他也證明了一條中值公式, 結果比承洞的弱一點, 即 $z = 1/6$, 而且未有關於哥德巴赫猜想的應用。我將承洞的結果告訴了巴爾巴恩。這時我又收到了承洞證明 $(1, 4)$ 的手稿與巴爾巴恩的信, 信上告訴我, 他已證明了 $(1, 4)$。我立即將承洞證明 $(1, 4)$ 的方法告訴了巴爾巴恩, 即用林尼克方法將他的中值公式中的 $z = 1/3$ 改進爲 $z = 3/8$。巴爾巴恩回信說, 他證明 $(1, 4)$ 的方法也是一樣的。這樣, 他們二人最後的結果是相同的。

65年, 龐比尼與阿、維諾格拉多夫獨立地將 $z = 3/8$ 改進爲 $z = 1/2$, 從而證明了 $(1, 3)$。龐比尼的結果略強一點, 而且證明方法是獨闢蹊徑, 十分簡潔的, 從而獲得了1974年的費爾茲獎。

66年, 景潤證明了 $(1, 2)$, 又將哥德巴赫猜想的記錄奪回到中國數學家的手中了。圖論組合學家王建方在國外訪問時, 曾有一個日本學者對他說: “在五、六十年代, 中國的解析數論著實光輝了一下”, 指的就是景潤與承洞。

山大爲承洞的成就而感到喜悅, 63年, 山大校慶期間, 數學系請了三個客人, 除夏道行是山大校友外, 閔先生與我顯然都是爲潘承洞而受到邀請的。這是我參加工作後第

一次出差。我們被安排住在濟南火車站附近的山東賓館之中。那時還處於困難時期, 每天能吃飽吃好, 住得也很舒服, 眞是福氣了。我慶幸承洞在山東時工作與生活都很愉快。

接著就是"四淸","文化大革命"。大家都未見過面, 當然也不敢見面, 一幌就是十幾年。

1976年, "十年浩劫"結束了, 春回大地了。數學所於當年就召集全國各著名大學派代表來數學所商談"如何恢復數學研究", "如何制訂各個數學領域的發展規劃", "如何在全國分工布局"等重大問題。一句話, 怎樣把二十年損失的光陰追回來。承洞與我終於又見面了。大家都沒有興趣談這些年的遭遇, 我們都幢景著美好的明天。他給我帶來了兩斤花生米, 那時北京每戶每月只配給兩斤蔬菜, 每人半斤肉, 我已記不得最後一次吃花生米是何年何月了。

1978年, 黨的十一屆三中全會召開了。1979年8月, 我們都應邀參加了在英國達爾姆召開的解析數論國際會議。同時應邀的還有華老與景潤。景潤未能去, 華老與我已從歐洲其他地方先期到達了。承洞見到我們時高興極了。承洞與我都是第一次出國, 在異國他鄉能碰見老朋友該多高興啊。這一週, 每天我們都去華老屋裡, 促膝談心, 傍晚一起散步, 同桌吃飯。承洞與我都被安排在全會上作報告。79年12月30日"光明日報"上登有林海採訪華老撰寫的文章, 文章說: "王元與潘承洞在會上作了報告, 不少人用'突出的成就','很多的水平'等評語, 贊揚中國數學家在研究解析數論方面所作的努力。一些白髮蒼蒼的數學家向華羅庚教授祝賀, 祝賀中國老一輩的數學家培養了這樣出色的人才"。早在達爾姆會議之前三個月之中, 我就在法國與西德多次作報告, 介紹景潤與承洞的成就, 對於孤立狀態下的中國數學家所作出的成績, 贏得了外國同行的高度尊重。

1980年夏天, 承洞安排我與一些較年輕的解析數論學者十多人去青島進行學術交流與度假。我們住在海邊北海修船廠的招待所裡。上午討論, 做研究。下午游泳。每天看著潮漲潮落。平靜時, 天水一片藍, 偶見幾點孤舟。風起時, 巨浪拍岸, 聲若悶雷。承洞是深度近視, 不會游泳, 也不能單獨去海邊岩石間與沙灘上漫步。經我多次動員, 由我扶著他, 我們一起去海邊散了一次步。以後, 我們又在濟南與青島聚會了幾次。淑英每次都同去, 她對承洞照顧得很仔細。

1986年, 我當上了全國政協委員, 承洞是全國人大代表。每年兩會同時開會時, 我們就約好在人大會堂進門休息廳的右側見面。這時我已聽到傳聞, 他患有腫瘤病, 又聽說他在手術後, 雖用化療, 但恢復得很快, 他的造血功能很好, 白血球增加恢復得很迅速。這以後, 我們在北京一起開會的機會就更多了。如每年的院士會議等。我們總是住在一間房子裡。每次我都是最多住一個晚上, 一起聊聊天, 我注意到他睡眠很好, 胃口也不錯, 可見他的心, 腎都很健康。其實, 我要求跟他住一屋的眞正用心在於我可以住在家裡, 讓他能得到更好的休息。

1992年, 香港大學廖明哲教授邀請承洞偕淑英去港大訪問兩週。那時我正在香港浸

會學院訪問, 這是我們第二次在海外相聚了。我曾去車站接送他, 也陪他玩玩。山東省對他的關懷眞讓人羨慕。省裡一家公司對他照顧得很好, 不但負責接送, 還在北角安排了一個單元給他們夫妻住。在香港寸土如金的地方, 有此待遇, 恐怕是罕見的。我們還得空在承洞住處自己做了一頓豐盛的晚飯呢。

1994年, 國家基金委在香港召開了一個會議, 要我們二人參加, 承洞很希望我去。大概因爲事情太多, 我未能去。不久, 就聽說承洞在香港時, 身體欠適, 臉色很黃。其實是有新的腫瘤生成了。回濟南後即住院治療, 山東省盡了最大努力, 在全國遍訪名醫, 手術進行了十一個小時, 這是他第三次動手術。承洞竟奇蹟般地康復了, 不久他居然又可以來北京開會了。

1997年5月, 承洞來北京參加院士會, 前些日子他的眼睛又成功地動了手術, 居然跟常人的眼睛一樣了。過去開會時, 吃飯與走路都要有人照顧一下他的, 現在完全可以自理了, 而且顯得比平常人更精神一些, 朋友們都向他表示衷心地祝賀。

不管怎麼說, 我們都老了。我對承洞說: "從95年, 我65歲開始, 我又重操中小學生時代的舊業, 練習寫毛筆字, 這對修身與健康都有好處"。我給了他幾張我臨摩的字看看, 承洞很高興, 他說: "我也要練字, 我們學校有好幾位書法家, 我還可以請他們指敎呢!"

1997年10月, 院士會在北京召開, 我接到承洞的電話, 他說腰痛, 大概是骨刺增生, 不能來了, 我也以爲是小毛病, 沒有在意, 只是安慰了他幾句。最後他說: "山大編輯了一本碑帖, 我已托人寄了一本給你"。以後又來過電話, 問我收到了沒有, 直到11月10日我收到了, 我們還通過電話。而且我告訴他, "報紙已經登了, 濟南市給了你一套房子, 並配有照片, 我們大家都衷心地爲你高興啊"。

12月27日上午, 所領導給我電話, 告訴我承洞已於凌晨二點走了, 我被這一消息嚇懵了, 頓時語塞, 也不相信, 一個多月前我們還通過電話嗎? 28日才從承洞的弟弟承彪處得到了證實並得知31日即將火化。他與淑英都不讓我去濟南。我還是買了31日8點去濟南的機票, 同行者還有數學會秘書長李文林。

6點多, 我們就到機場去等候了, 機場有告示, 濟南有大霧, 航班延期, 8點, 9點, 10點, 至11點, 才有廣播說, 10點40分的航班取消了。我們也只能去辦退票手續了。至12點離開機場。第二天淸晨接到電話: "後事已辦完, 從黨政軍領導到群衆, 一千多人向承洞送別, 大霧至晚仍未散去"。

—本文作者任教於中國科學院, 數學研究所—

從尤拉公式到空間的平面分割

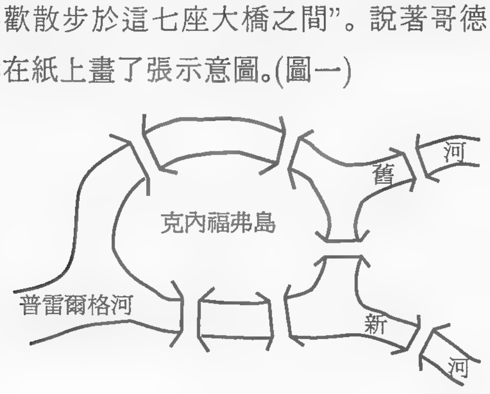
宋秉信

摘　要: 本文通過具體事例, 介紹拓樸學在初等數學中的應用。把歐拉定理引入初等幾何, 得到定理一。它為"直線分割平面問題"的求解提供一個模式。再將定理一縱向延伸, 也就是將布安加雷定理橫向延伸, 得到定理二。它為"平面分割空間問題"的求解提供了一個模式。

關鍵詞: 頂點、面數、稜數、分割。

(一)

1735 年夏天的一個晚上, 哥德巴赫 (Goldbach) 對歐拉 (Euler, Leonhard) 說: "在我的故鄉, 東普魯士的哥尼斯堡 (Konigsberg), 有條普雷格爾河 (Pregl)。它分成兩叉流進城內, 然後在克內福弗島 (Kneiphof) 匯集。河面上有七座大橋, 把克內福弗島與兩岸城區相聯。島上有所古老的哥尼斯堡大學。每天傍晚時分, 大學生們都喜歡散步於這七座大橋之間"。說著哥德巴赫在紙上畫了張示意圖。(圖一)



圖一

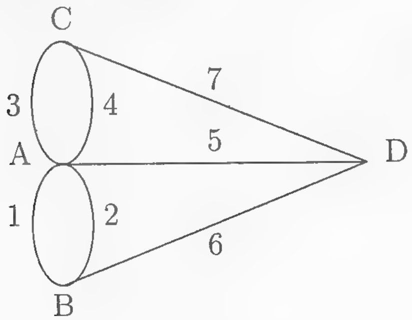
"有一天, 有一個大學生和同伴們打賭: 看誰能連著一次走遍這七座橋, 每座橋只准走過一次, 既不能重複也不准遺漏"。

"這雖然是一個普通的玩笑, 但是它卻難倒了哥尼斯堡所有的人。連以博學著稱的哥尼斯堡大學的教授們也感到一籌莫展"。

"故鄉的人們寫信找我, 要我幫助解決。我想你也許對這個問題會有興趣"。

歐拉將信從頭到尾認眞看了一遍。他認為這絕不是一個普通遊戲, 而是一個頗有價值的數學問題。在以後的思考中, 他首先想到的是德國大數學家萊布尼茲 (Leibniz, Gottfried Wilhelm) 在1679年寫的「幾何特徵」一書。他在研究紮記中寫道: "古希臘研究的幾何學, 是研究幾何量 (長度和角度) 大小及其測量方法的學科。萊布尼茲首先提出了幾何學的另一個分支, 即位置幾何學。這個分支至今還很少為人所知。它研究的對象只依賴於物體的相對位置和順序, 而

與幾何量的大小無關”。根據這個思想, 他認爲兩岸的陸地和河中的小島只是聯結橋樑的節點, 它們的大小與這個問題無關, 所以可以縮成四個點。七座橋是必須經過的路線, 且每條路只允許走過一次, 可抽象成七條線來表示。如圖二。這樣,



(圖二)

歐拉把一個貌似複雜的實際問題抽象並簡化成圖二的形式, 即通過四個點, 七條線的“一筆畫”問題。而且歐拉從衆多人的失敗中想到, 這樣的走法可能根本就不存在。隨後, 他用 MM 方法出色地證實了自己的猜想是正確的。並於1736年完成了題爲「哥尼斯堡七橋問題」的著名論文。這篇論文奠定了數學的一個分支—「拓撲學」和「現代圖論」的基礎。在此基礎上歐拉又作出了一個重要貢獻, 這就是人所共知的“多面體公式”。

(二)

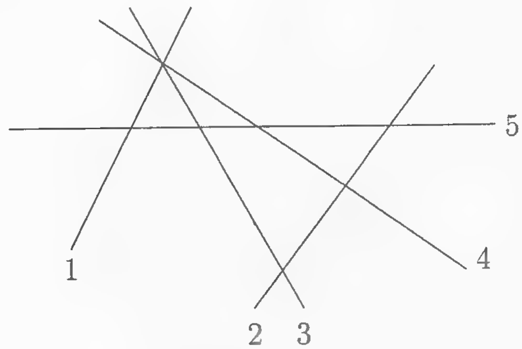
歐拉在研究任意的凸多面體時, 發現凸多面體頂點數、稜數與面數之間, 存在著以下的奇妙關係:

頂點數 $V-$ 稜數 $E+$ 面數 $F=2$。

這便是拓樸學中著名的歐拉定理。其中凸多面體中的頂點數、稜數、面數的關係式: $V-E+F=2$ 被後人稱之爲“歐拉示性數”。

我們知道, 這裡所說的邊可以是彎曲的, 而且都有兩個端點 (這兩個端點就是平面圖的頂點, 所謂邊就是兩個頂點之間的連線), 這樣的圖有而且只有一個無限面。

我們現在來研究另一種平面圖, 它是由一些直線構成的。我們把這種圖叫做直線網。如圖 (三) 就是一個由五條直線構成的平面圖。



(圖三)

定義1: 在直線網中, 只有一個端點或沒有端點的邊叫做無限邊。邊界含無限邊的面叫做無限面。

由此可見, 直線網中不只一個無限面。如果直線網中有兩條邊所在的直線相交, 那麼該直線網一定是連通的。不連通的只是那些由互相平行的直線構成的直線網。其頂點數一定是 0, 面數比稜數多 1。

定理一: 如果是連通的直線網, 那麼有

$$V-E+F=1$$

其中 V、E、F 分別爲連通的直線網的頂點數, 邊數和面數。

證明: 我們不妨用一個足夠大的圓把直線網中的所有頂點都圈在裡面。結果每條無限邊都必然會與圓有且只有一個交點。因此, 圓上點的個數就是無限邊的條數, 用 E' 表示。而 E' 個點把圓分成 E' 段弧, 這些弧與直線網中的 F' 個無限面一一對應。於是有 $E' = F'$。抹掉直線網中所有的無限邊, 便得到一個拓樸學中的連通平面圖, 其頂點數、邊數、面數分別爲 V、$E-E'$、$F-F'+1$, 由歐拉定理, 得

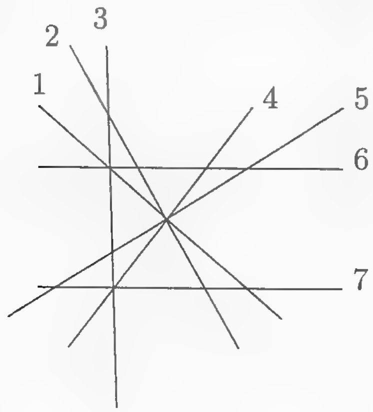
$$V-(E-E')+(F-F'+1)=2,$$

即 $V-E+F=1$。 (證畢)

註: (1) 對於不連通的直線網, 也有 $V-E+F=1$, 這是一個很明顯的事實。

(2) 歐拉定理對於直線網不成立。定理一僅僅是將歐拉定理加以延伸。

如圖四所示, 它是由7條直線構成的連通的直線網。其中 $V=16$, $E=41$, $F=26$, 則有 $V-E+F=16-41+26=1$。



(圖四)

有了定理一, 爲我們求解 "直線分割平面" 問題提供了一個數學模型。

例1: 平面上有 n 條直線, 其中任何兩條不平行, 任何三條不過同一點, 證明這 n 條直線把平面分成 $\frac{1}{2}(n^2+n+2)$ 個部分。

證明: 因 n 條直線中任何兩條不平行, 所以知道在 n 條直線中的任何一條都與另外 $n-1$ 條直線相交。故每條直線上都有 n 條邊和 $n-1$ 個頂點, 其中每個頂點都是兩條直線公共的。由此可知, $V=\frac{1}{2}n(n-1)$, $E=n^2$, 由定理一, 得

$$\begin{aligned}F&=E+1-V\\&=n^2+1-\frac{1}{2}n(n-1)\\&=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+1\\&=\frac{1}{2}(n^2+n+2)。\end{aligned}$$

(證畢)

例2: 平面上有 n 條拋物線, 其中每兩條只相交於兩個點, 並且每三條都不相交於同一點。求證這 n 條拋物線把平面分成 n^2+1 個平面。



(圖五)

證明: 在拓撲學中對於直線與曲線被看成是相同的, 因爲它們中的每一條都代表兩點之間的道路。如圖五中直線 AB 與曲線 CD。這樣一來, 我們可以把拋物線看作是直線。因爲

$$V=\frac{1}{2}n(2n-2)=n^2-n,$$
$$E=n(2n-1)=2n^2-n。$$

根據定理一, 得

$$F = E - V + 1$$
$$= 2n^2 - n - (n^2 - n) + 1$$
$$= n^2 + 1. \qquad \text{(證畢)}$$

例3: $n(n \geq 3)$ 條直線將平面分割成多少塊? 試就下列情況加以解答:

i) n 條直線中恰有 $p(p \geq 2)$ 條互相平行, 此外沒有再相互平行的。而且 n 條直線中沒有三條相交於同一個點;

ii) n 條直線中恰有 $K(K \geq 3)$ 條相交於同一個點, 除這個交點外, 再沒有多於兩條的直線相交於同一點, 而且也沒有兩條直線互相平行。

解: (i) 因爲互相平行的 p 條直線中的每一條都與 $(n-p)$ 條直線相交。另外, $(n-p)$ 條直線中的每一條都與 $(n-1)$ 條直線相交, 所以有:

$$E = p(n-p+1) + (n-p)\cdot n.$$

又因沒有三條直線相交於一點, 所以有:

$$V = \frac{1}{2}[p(n-p) + (n-p)(n-1)]$$
$$= \frac{1}{2}(n-p)(p+n-1).$$

根據定理一, 得

$$F = E - V + 1$$
$$= p(n-p+1) + (n-p)\cdot n - \frac{1}{2}(n-p)(p+n-1) + 1$$
$$= p(n-p+1) + (n-p)\cdot[n - \frac{1}{2}(n+p-1)] + 1$$
$$= p(n-p+1) + \frac{1}{2}\cdot(n-p)(n-p+1) + 1$$
$$= \frac{1}{2}(n+p)(n-p+1) + 1。$$

(ii) 除它們的公共點外, 共點的 k 條直線中的每一條直線上都有 $(n-k)$ 個頂點, 另外 $(n-k)$ 條直線中的每一條直線上都有 $(n-1)$ 個頂點。因此,

$$V = \frac{1}{2}[k(n-k) + (n-k)(n-1)] + 1$$
$$= \frac{1}{2}(n-k)(n+k-1) + 1,$$
$$E = k(n-k+2) + (n-k)\cdot n。$$

根據定理一, 得

$$F = E - V + 1$$
$$= k(n-k+2) + (n-k)n - [\frac{1}{2}(n-k)(n+k-1) + 1] + 1$$
$$= k(n-k+2) + \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$
$$= k(n-k+1) + k + \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$
$$= \frac{1}{2}(n+k)(n-k+1) + k。$$

(三)

布安加雷曾將歐拉定理推廣到 n 維空間, 代替頂點、稜和面數的是 $0, 1, 2, \cdots, n-1$ 維的形象。設這些形象的個數分別用 u_0, $u_1, u_2, \ldots, u_{n-1}$ 表示, 則對於和簡單的多面體相當的流形有下列關係式, 即布安加雷定理:

$$u_0 - u_1 + u_2 - \cdots + (-1)^{n-1}u_{n-1}$$
$$= 1 - (-1)^n \qquad (n \in N)$$

如果在布安加雷定理中令 $n=4$, 並把它嫁接到由一些平面構成的平面網中, 可得到一個新的定理。

定義2: 若干個平面把空間分割成 n 個部分, 我們把這 n 部分空間稱爲體。面界如果是含無限面的體, 那麼該體稱之爲無限體。

定理二: n 個不全平行的平面構成一個平面網, 如果其中有 V 個頂點, E 條稜, F 個面, 這些平面把空間分割成 S 個部分, 那麼有關係式:

$$V-E+F-S=-1$$

成立。

證明: 分兩種情況進行討論:

(i) 若 $V=0$ 時, 則構成平面網的所有平面都經過同一條直線, 或者它們的交線互相平行。這時平面網中的稜都是無限稜, 作一個與這些稜垂直的平面, 則在這個平面上必然會出現一個連通的直線網。其頂點數、邊數、面數分別爲 E、F、S。由定理一知, $E-F+S=1$ 。於是有:

$$\begin{aligned} V-E+F-S &= V-(E-F+S) \\ &= 0-1=-1。\end{aligned}$$

ii) 若 $V\neq 0$ 時, 那麼我們可以用一個足夠大的球面將所有的頂點都罩在這個球面裡面。結果會在球面上出現一個連通圖, 它可以經過橡皮變形成爲一個簡單多面體。當然, 其頂點數、稜數、面數分別等於平面網中的無限稜條數 E', 無限面個數 F', 無限體個數 S'。根據歐拉定理, 有 $E'-F'+S'=2$。

我們拿掉所有的無限稜, 便得到一個拓樸學中和簡單多面體相當的流形, 其頂點數、稜數、面數、體數分別爲 V、$E-E'$、$F-F'$、$S-S'+1$, 由布安加雷定理, 得

$$V-(E-E')+(F-F')-(S-S'+1)=0$$

即

$$(V-E+F-S)+(E'-F'+S')-1=0$$

所以, 有

$$V-E+F-S=-1。\qquad \text{(證畢)}$$

註: (i) 定理中條件是 n 個不全平行的平面構成一個平面網。而對於由互相平行的平面構成的平面網, 定理也是成立的。因爲這時 $V=E=0$, $S=F+1$, 所以 $V-E+F-S=-1$。

(ii) 用平面 α 任意分割平面網 W, 得到一個新平面網 W', 結果平面 α 上有一個直線網。設其面數爲 F, 又設平面網 W、W' 的體數分別爲 S、S', 則 $S'=S+F$。

例4: 空間有任何兩個不平行, 任何三個不共線, 任何四個不共點的 n 個平面。求證這 n 個平面把空間分割成 $\frac{1}{6}(n^3+5n+6)$ 個部分。

證明: 因爲每個平面上都有一個由 $n-1$ 條直線 (其中任何兩條不平行, 任何三條不過同一點) 構成的直線網, 其頂點數、邊數、面數分別爲:

$$\begin{aligned} V_0 &= \frac{1}{2}(n-1)(n-2),\ E_0=(n-1)^2 \\ F_0 &= \frac{1}{2}[(n-1)^2+(n-1)+2] \\ &= \frac{1}{2}(n^2-n+2)。\end{aligned}$$

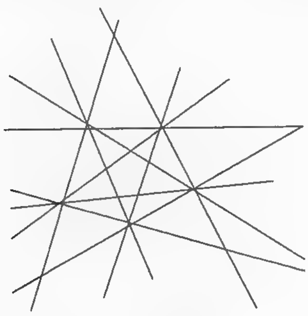
從而有: $V=\frac{1}{3}nV_0=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$; $E=\frac{1}{2}nE_0=\frac{1}{2}n(n-1)^2$; $F=nF_0=\frac{1}{2}n(n^2-n+2)$。

根據定理二, 有

$$\begin{aligned}S&=V-E+F+1\\&=\frac{1}{6}(n^3-3n^2+2n)\\&\quad-\frac{1}{2}(n^3-2n^2+n)\\&\quad+\frac{1}{2}(n^3-n^2+2n)+1\\&=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)。\qquad(證畢)\end{aligned}$$

例5: 正十二面體的各個面延伸後, 所得的十二個平面把空間分割成多少個部分?

解: 根據題設中的條件知, 十二個平面構成一個平面網, 其中每個平面上都有一個由五對平行直線構成的直線網, 其頂點數、邊數、面數分別爲 16、50、36。如圖六。



(圖六)

由於直線網中的 15 個頂點中屬於四條直線的公共點的頂點有 5 個, 它們中的每一個都是五個平面的公共點。而屬於兩條直線的公共點的頂點有 10 個, 它們中的每一個都是三個平面的公共點。因此, 可以知道, $V=\frac{1}{5}(5\times 12)+\frac{1}{3}(10\times 12)=52$。

由於正十二面體的各個面延伸後, 任何三個平面都不共線, 因此有:

$$E=\frac{1}{2}(50\times 12)=300,\ F=36\times 12=432。$$

根據定理二, 有

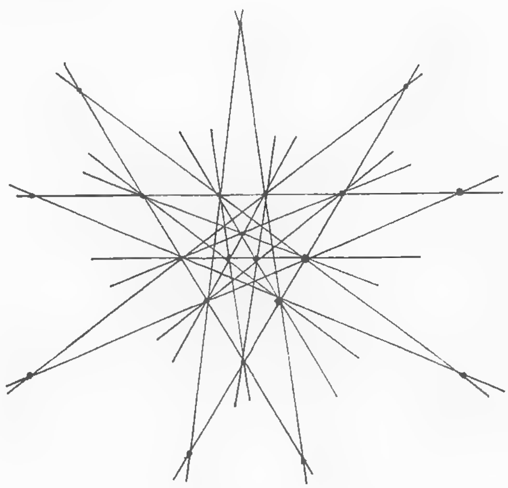
$$\begin{aligned}S&=V-E+F+1\\&=52-300+432+1=185。\end{aligned}$$

答: 可把空間分割成 185 個部分。

註: 在例4中, 令 $n=12$, 則 $S=\frac{1}{6}(n^3+5n+6)=\frac{1}{6}(12^3+5\times 12+6)=299$。這就是說十二個平面最多可把空間分割成 299 個部分。而本題的結果比它小得多, 這是不足爲奇的。

例6: 正二十面體的各個面延伸後, 所得的二十個平面把空間分割成多少個部分?

解: 如圖七所示, 因爲正二十面體的各個面延伸後所得的二十個平面上都有這樣一張直線網。



圖七

所以, 有

$$V=\frac{1}{6}(6\times 20)+\frac{1}{5}(6\times 20)+\frac{1}{4}(6\times 20)+\frac{1}{3}(30\times 20)=274。$$

$$E=\frac{1}{2}(150\times 20)=1500,$$

$$F=103\times 20=2060。$$

根據定理二, 得

$$S=V-E+F+1$$
$$=274-1500+2060+1=835。$$

答: 所得二十個平面把空間分割成 835 個部分。

註: 若令 $n=20$, 由例 4 中條件可知二十個平面最多可把空間分割成1351個部分。

值得注意的是在例5, 例6中, 用所得的結果除以它們相應的最大可能值, 其商都非常接近黃金分割數 0.618, 如例6中: $835\div 1351\approx 0.6180606\cdots$ 例5中: $185\div 299\approx 0.618729$。

由"歐拉示性數"可以證明正多面體只有五種: 正四面體、正六面體、正八面體、正十二面體、正二十面體。我猜想這五種正多面體都有這一性質。

參考資料

1. D. 希爾伯特和康福森合著, 直觀幾何, 北京高教出版社, 王聯芳譯, 84年。
2. 儲嘉康, 歐拉, 四川出版社, 84年, p.58-59 。
3. 全日制十年制高中 「數學」 課本第三册, p144, 北京, 教育出版社。

—本文作者任教於中國湖南省湘潭教育學院數學系—

正項數列及其算數平均數列與幾何平均數列斂散性之比較

張國男

正文 (論證及實例)

本篇之主旨, 係針對正項數列 $\{a_n\}$, 及其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$, 與幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 三者, 研究其斂散之蘊涵關係。為廣流傳, 俾利教學, 特將探求所得之結果, 綜合整理之, 而撰成此短文, 獻與高中數理資優班師生及大專修習微積分課程之學生, 以供參考。

於本篇中, 恆以 C, R 與 N 分別表示所有複數, 所有實數與所有正整數所構成之集合。茲先引介下列之基本定義及重要備註:

定義: 設 $a_n \in C\ \forall n \in N$, 且 $\alpha \in C$。若任予 $\varepsilon > 0$, 必 (對應) 有 $p \in N$ (p 可隨 ε 之變動而變動), 能使 $|a_n - \alpha| < \varepsilon\ \forall n \geq p$, 則謂 (無窮) 數列 $\{a_n\}$ 有極限 α, 亦謂 α 為數列 $\{a_n\}$ 之極限, 更謂數列 $\{a_n\}$ 收斂於α, 並記 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 或 $a_n \to \alpha$ 以表此事實; 此時 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 存在, 數列 $\{a_n\}$ 收斂。若無合乎上述條件之定數 α, 則謂 $\{a_n\}$ 無極限; 此時 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 數列 $\{a_n\}$ 發散。

備註: 對於上述之定義, 宜作下列二項考察:

(一) 一數列 $\{a_n\}$ 若有極限, 則僅有一極限: 蓋若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_1$, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha_2$, 且 $\alpha_1 \neq \alpha_2$, 則據上述定義, 對於 $\varepsilon = |\alpha_1 - \alpha_2| > 0$ 而言, 必有 $p_1, p_2 \in N$, 使 $|a_n - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq p_1$, 且 $|a_n - \alpha_2| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq p_2$。取 $p = \max(p_1, p_2)$, 則當 $n \geq p$ 時, $\varepsilon = |\alpha_1 - \alpha_2| = |(a_n - \alpha_2) - (a_n - \alpha_1)| \leq |a_n - \alpha_2| + |a_n - \alpha_1| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$, 矛盾! 故必 $\alpha_1 = \alpha_2$。由此, 遂知: 上述定義中「數列 $\{a_n\}$ 有極限 α 」,「 α 為數列 $\{a_n\}$ 之極限」, $\cdots$,「記 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 或 $a_n \to \alpha$ 以表此事實」等, 均為合理之用語。

(二) 若 $a_n \in R$, $\forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在, 則必 $\alpha \in R$: 蓋若不然, 設 $\alpha = x + yi$, 其中 $x, y \in R$, 且 $y \neq 0$, 則據上述定義, 對於 $\varepsilon = |y| > 0$ 而言, 必有 $p \in N$, 使 $|a_p - \alpha| < \varepsilon$。因此, 遂得 $|y| \leq \sqrt{(a_p - x)^2 + y^2} < \varepsilon = |y|$, 矛盾! 故必 $\alpha \in R$。由是, 遂知: 實數數列若有極限, 則其極限必為實數。

在正文中, 除非特別聲明, 否則恆限定 $a_n > 0\ \forall n \in N$; 再者, 除非附帶解說, 否則數列斂散之推導驗證, 俱以上述之定義爲據。

正項數列 $\{a_n\}$, 其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$, 與幾何平均數列 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 三者斂散之關係, 共可分爲六種, 如下列之問題1,2,3,4,5 與6所示。茲依序推證於後:

問題1: 若數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, 試證之。

證明: 因數列 $\{a_n\}$ 收斂, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數。

(1) 設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 必有 $p \in N$, 使 $|a_n-\alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall n \geq p$。因 $\sum_{k=1}^p |a_k - \alpha|$ 爲固定之 (非負) 實數, 必有 $q \in N$, 使 $\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^p |a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2}\ \forall m \geq q$。由是, 可知 $|\frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^{p+m} a_k - \alpha| = \frac{1}{p+m}|\sum_{k=1}^{p+m}(a_k - \alpha)| \leq \frac{1}{p+m}\sum_{k=1}^p |a_k - \alpha| + \frac{1}{p+m}\sum_{k=p+1}^{p+m}|a_k - \alpha| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{m\varepsilon}{2(p+m)} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon\ \forall m \geq q$, 故 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - \alpha| < \varepsilon\ \forall n \geq p+q$, 遂證得 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \alpha$ 矣。

(2) 因已約定 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 故由上述備註 (二) 知 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha \in R$。若 $\alpha < 0$, 則據定義, 對於 $\varepsilon = -\frac{\alpha}{2} > 0$ 而言, 必有 $p \in N$, 使 $|a_p - \alpha| < \varepsilon = -\frac{\alpha}{2}$; 但 $a_p > 0$, 故得 $-\alpha < a_p - \alpha < -\frac{\alpha}{2}$, 矛盾! 遂知 $\alpha \geq 0$。(i) $\alpha = 0$ 時, 可推導如次: 設 $\varepsilon > 0$ 已予。由 (1), 可知 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = 0$, 故必有 $p \in N$, 使 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq p$。據算術平均與幾何平均不等式, 遂有 $|(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} - 0| \leq |\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - 0| < \varepsilon\ \forall n \geq p$, 故證得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = 0$ 矣。(ii) $\alpha > 0$ 時, 可推導如次: 若 $\varepsilon' > 0$ 已予, 可取一定數 ε, 使 $\varepsilon \leq \varepsilon'$, 且 $0 < \varepsilon < \alpha$。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$, 必有 $p \in N$, 使 $\alpha - \frac{\varepsilon}{3} < a_n < \alpha + \frac{\varepsilon}{3}\ \forall n \geq p$。若令 $a = \prod_{k=1}^p \frac{a_k}{\alpha}$, 且 $c_n = (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, 其中 $n \in N$, 則 $c_{p+m} = (\prod_{k=1}^{p+m} a_k)^{\frac{1}{p+m}} = \alpha a^{\frac{1}{p+m}}(\prod_{k=p+1}^{p+m}\frac{a_k}{\alpha})^{\frac{1}{p+m}}\ \forall m \in N$, 據上可得 $\alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1 - \frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}} < c_{p+m} < \alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1 + \frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}}\ \forall m \in N$。由此與 $1 - \frac{\varepsilon}{3\alpha} < (1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}}$ 及 $(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})^{\frac{m}{p+m}} < 1+\frac{\varepsilon}{3\alpha}$, 知 $\alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1 - \frac{\varepsilon}{3\alpha}) < c_{p+m} < \alpha a^{\frac{1}{p+m}}(1 + \frac{\varepsilon}{3\alpha})\ \forall m \in N$; 又, 若取 $q \in N$, 使 $q > \frac{\log_{10} a}{\log_{10}(1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})} - p$, $q > \frac{\log_{10} a}{\log_{10}(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})} - p$, 則 $1-\frac{\varepsilon}{3\alpha} < a^{\frac{1}{p+m}} < 1+\frac{\varepsilon}{3\alpha}\ \forall m \geq q$; 合之, 得 $\alpha(1-\frac{\varepsilon}{3\alpha})^2 < c_{p+m} < \alpha(1+\frac{\varepsilon}{3\alpha})^2\ \forall m \geq q$。據此與 $1 - \frac{\varepsilon}{\alpha} < (1 - \frac{\varepsilon}{3\alpha})^2$ 及 $(1 + \frac{\varepsilon}{3\alpha})^2 < 1+\frac{\varepsilon}{\alpha}$, 可知 $\alpha-\varepsilon < c_{p+m} < \alpha+\varepsilon\ \forall m \geq q$, 故 $|c_n - \alpha| < \varepsilon \leq \varepsilon'\ \forall n \geq p + q$, 遂證得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ 矣。

備註: (一) 由 (1) 之推導, 可知: 若 $a_n \in C\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在, 則必 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \alpha$。換言之, 若數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則其算術平均數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 亦必收斂, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \lim_{n\to\infty} a_n$; 根本不必限定 $a_n \in R$, 當然更無須限定 $a_n > 0$。

(二) 解答 (2) 之 (i), 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ 之情形, 亦可仿 (2) 之 (ii) 而推導如次:

設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 必有 $p \in N$, 使 $|a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{2}$ 即 $0 < a_n < \frac{\varepsilon}{2}$ $\forall n \geq p$, 故 $0 < (\prod_{k=1}^{p+m} a_k)^{\frac{1}{p+m}} = (\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p+m}}(\prod_{k=p+1}^{p+m} a_k)^{\frac{1}{p+m}} < (\prod_{k=1}^{p} a_k)^{\frac{1}{p+m}}(\frac{\varepsilon}{2})^{\frac{m}{p+m}} = (\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon})^{\frac{1}{p+m}}(\frac{\varepsilon}{2})$ $\forall m \in N$。因 $\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon}$ 爲固定正數, 必有 $q \in N$ 使 $\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon} < 2^{p+q}$, 故 $0 < (\prod_{k=1}^{p} \frac{2a_k}{\varepsilon})^{\frac{1}{p+m}} < 2$ $\forall m \geq q$。據上, 遂知 $|(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} - 0| < 2(\frac{\varepsilon}{2}) = \varepsilon$ $\forall n \geq p+q$, 故證得 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 0$ 矣。

(三) 若不限定極限之論證須據上述之定義, 且讀者已充分了解常用對數及指數函數之定義與其基本性質, 則解答 (2) 之 (ii), 即 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha > 0$ 之情形, 亦可推導如次: 因 $a_n > 0$ 且 $a_n \to \alpha$, 故 $\log_{10} a_n \to \log_{10}\alpha$。據此與 (1)[參考備註 (一), 注意 $\log_{10} a_n$ 未必爲正], 得 $\log_{10}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \log_{10} a_k \to \log_{10}\alpha$, 故 $(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 10^{\log_{10}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}} \to 10^{\log_{10}\alpha} = \alpha$。

(四) 早年, 大多數理工科系微積分教本均列有如下之習題: 若 $a_n \in R$ $\forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 存在, 則必 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$, 試證之。

(五) 設 α 爲固定之正數, 令 $a_n = \alpha$ $\forall n \in N$, 則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ $\forall n \in N$。若 $\varepsilon > 0$ 已予, 則因 $|a_n - \alpha| = 0 < \varepsilon$ $\forall n \in N$, 故 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$; 遂知此爲 $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂於 α (其實三數列全同) 之一簡明實例。

問題 2: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2\ (\text{若 } n = \ell^2, \text{而 } \ell \in N), \\ 1\ (\text{若 } n \in N\backslash\{\ell^2|\ell \in N\})。\end{cases}$$

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則必有 $p \in N$, 使 $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ $\forall n \geq p$, 故 $1 = |a_{p^2+1} - a_{p^2}| = |(a_{p^2+1} - \alpha) - (a_{p^2} - \alpha)| \leq |a_{p^2+1} - \alpha| + |a_{p^2} - \alpha| < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$, 矛盾! 遂知數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 若 $n \in N$, 則必有 $\ell \in N$, 使 $\ell^2 \leq n < (\ell+1)^2$, 故 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n+\ell}{n} = 1 + \frac{\ell}{n}$, 遂知 $1 < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \leq 1 + \frac{\sqrt{n}}{n} = 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$。設 $\varepsilon > 0$ 已予。若取 $p \in N$, 使 $p > (\frac{1}{\varepsilon})^2$, 則據上可得 $-\varepsilon < \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k - 1 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{p}} < \varepsilon$ $\forall n \geq p$, 故 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = 1$, 即數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂於 1。

(3) 設 $\varepsilon > 0$ 已予。因 $1 < (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{\ell}{n}} \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$, 若取 $p \in N$, 使 $p > [\frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}]^2$, 則 $-\varepsilon < (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} - 1 \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}} - 1 \leq 2^{\frac{1}{\sqrt{p}}} - 1 < \varepsilon$ $\forall n \geq p$, 故 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$, 即數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂於 1。

由 (1)~(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一)$\{a_n\}$ 之建構: 考慮各項均爲 1 之無窮數列 [參見問題 1 備註 (五)], 將其第 ℓ^2 項 ($\ell \in N$) 俱改爲 2, 即得本題所舉之數列 $\{a_n\}$。由於 a_{ℓ^2} 與 a_{ℓ^2+1} 之差恆爲 1, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$ 與 1 之距離$= \frac{\ell}{n} \leq \frac{1}{\sqrt{n}}$,

且 $(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與1之比值介於1與 $2^{\frac{\ell}{n}} \le 2^{\frac{1}{\sqrt{n}}}$ 之間, 直覺認爲數列 $\{a_n\}$ 發散, 且 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂於1。[正式論證見上示解答]

(二) 類似實例:

$$a_n = \begin{cases} 3(若n=\ell^2, 而\ell \in N), \\ 1(若n \in N\backslash\{\ell^2|\ell \in N\}); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 4(若n=\ell^2, 而\ell \in N), \\ 1(若n \in N\backslash\{\ell^2|\ell \in N\}); \end{cases} \cdots$$

$$a_n = \begin{cases} 2(若n=\ell^3, 而\ell \in N), \\ 1(若n \in N\backslash\{\ell^3|\ell \in N\}); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 2(若n=\ell^4, 而\ell \in N), \\ 1(若n \in N\backslash\{\ell^4|\ell \in N\}); \end{cases} \cdots。$$

問題3: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k \neq \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} 2(若n爲正奇數), \\ \frac{1}{2}(若n爲正偶數), \end{cases}$$

則

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \begin{cases} \frac{5}{4}+\frac{3}{4n}(若n爲正奇數), \\ \frac{5}{4}(若n爲正偶數), \end{cases}$$

$$(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} 2^{\frac{1}{n}}(若n爲正奇數), \\ 1(若n爲正偶數)。 \end{cases}$$

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則必有 $p \in N$, 使 $|a_n-\alpha| < \frac{1}{2}\ \forall n \ge p$, 故 $\frac{3}{2} = |a_{p+1}-a_p| = |(a_{p+1}-\alpha)-(a_p-\alpha)| \le |a_{p+1}-\alpha|+|a_p-\alpha| < \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 即數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 若 $n = 2j+1 (j \in N \cup \{0\})$, 則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n}[(2+\frac{1}{2})j+2] = \frac{1}{n}[\frac{5}{2}(\frac{n-1}{2})+2] = \frac{5}{4}+\frac{3}{4n}$; 若 $n = 2j (j \in N)$, 則 $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \frac{1}{n}(2+\frac{1}{2})j = \frac{1}{n}\cdot\frac{5}{2}\cdot\frac{n}{2} = \frac{5}{4}$。設 $\varepsilon > 0$ 已予。若取 $p \in N$, 使 $p > \frac{3}{4\varepsilon}$, 則 $|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k - \frac{5}{4}| \le \frac{3}{4n} \le \frac{3}{4p} < \varepsilon\ \forall n \ge p$, 故 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k = \frac{5}{4}$, 即數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 收斂於 $\frac{5}{4}$。

(3) 設 $\varepsilon > 0$ 已予。若取 $p \in N$, 使 $p > \frac{1}{\log_2(1+\varepsilon)}$, 則 $0 \le (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} - 1 \le 2^{\frac{1}{n}} - 1 \le 2^{\frac{1}{p}} - 1 < \varepsilon\ \forall n \ge p$, 故 $|(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} - 1| < \varepsilon\ \forall n \ge p$, 遂知 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}} = 1$, 即數列 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂於1。

由 (1)~(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) 由於 a_{2n-1} 與 a_{2n} 之差恆爲 $\frac{3}{2}$, $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$ 與 $\frac{5}{4}$ 之距離 $\le \frac{3}{4n}$, 且 $(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$ 與1之比值介於1與 $2^{\frac{1}{n}}$ 之間, 直覺認爲數列 $\{a_n\}$ 發散, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 收斂於 $\frac{5}{4}$, $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂於1。[正式論證見上示解答]

(二) 類似實例:

$$a_n = \begin{cases} 3(若n爲正奇數), \\ \frac{1}{3}(若n爲正偶數); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 4(若n爲正奇數), \\ \frac{1}{4}(若n爲正偶數); \end{cases} \cdots。$$

問題4: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 與 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 俱發散, 且 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} n(\text{若}n\text{爲正奇數}), \\ \frac{1}{n-1}(\text{若}n\text{爲正偶數}), \end{cases}$$

$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k$, $c_n = (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$。

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則必有 $p \in N$, 使 $|a_n - \alpha| < 1\ \forall n \geq p$, 故 $2 = |a_{2p+1} - a_{2p-1}| = |(a_{2p+1} - \alpha) - (a_{2p-1} - \alpha)| \leq |a_{2p+1} - \alpha| + |a_{2p-1} - \alpha| < 1 + 1 = 2$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 即數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 由 $b_{2n-1} \geq \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n} a_{2j-1} = \frac{1}{2n-1}\sum_{j=1}^{n}(2j-1) = \frac{n^2}{2n-1} = \frac{n}{2} + \frac{n}{2(2n-1)} > \frac{n}{2}\ \forall n \in N$, 可知數列 $\{b_n\}$ 發散: 蓋若 $\{b_n\}$ 收斂, 設 $\lim_{n\to\infty} b_n = \beta$, 則必有 $p \in N$, 使 $|b_n - \beta| < 1\ \forall n \geq p$, 故 $b_n = |(b_n - \beta) + \beta| \leq |b_n - \beta| + |\beta| < 1 + \beta\ \forall n \geq p$; 取 $n \in N$, 使 $n \geq p$ 且 $n \geq 2(1+\beta)$, 則得 $b_{2n-1} < 1 + \beta \leq \frac{n}{2} < b_{2n-1}$, 矛盾!

(3) 顯然,

$$c_n = \begin{cases} n^{\frac{1}{n}}(\text{若}n\text{爲正奇數}), \\ 1(\text{若}n\text{爲正偶數})。 \end{cases}$$

令 $n^{\frac{1}{n}} = 1 + h_n (n \in N)$, 則 $h_1 = 0$, $h_n > 0 (n \geq 2)$。當 $n \geq 2$ 時, 由 $n = (1+h_n)^n = 1 + nh_n + \frac{n(n-1)}{2}h_n^2 + \cdots$, 得 $n - 1 > \frac{n(n-1)}{2}h_n^2$; 故 $h_n < \sqrt{\frac{2}{n}}\ \forall n \in N$。設 $\varepsilon > 0$ 已予。若取 $p \in N$, 使 $p > \frac{2}{\varepsilon^2}$, 則 $|c_n - 1| \leq h_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \leq \sqrt{\frac{2}{p}} < \varepsilon\ \forall n \geq p$, 故 $\lim_{n\to\infty} c_n = 1$, 即數列 $\{c_n\}$ 收斂於1。

由 (1)~(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) 多數微積分教本均列有「試證 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$」或「試求 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n}$」之習題。[參見上示解答 (3)]

(二) 本題實例之建構, 其難度較高。解題之靈感, 來自 $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ 之事實 [見備註 (一)]; 據

$$(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \begin{cases} n^{\frac{1}{n}}(\text{若}n\text{爲正奇數}) \\ 1(\text{若}n\text{爲正偶數}) \end{cases}$$

反推之, 即得數列 $\{a_n\}$。

(三) 類似實例:

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{n}(\text{若}n\text{爲正奇數}), \\ n-1(\text{若}n\text{爲正偶數}); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 1(\text{若}n=1), \\ n-1(\text{若}n\text{爲大於}1\text{之奇數}), \\ \frac{1}{n}(\text{若}n\text{爲正偶數}); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 1(\text{若}n=1), \\ \frac{1}{n-1}(\text{若}n\text{爲大於}1\text{之奇數}), \\ n(\text{若}n\text{爲正偶數})。 \end{cases}$$

問題5: 試舉一數列$\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散, 且 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 並驗證之。

解答: 令

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2^n}(\text{若}n = 2^\ell - 1, \text{而}\ell \in N), \\ 2(\text{若}n \in N\backslash\{2^\ell - 1 | \ell \in N\}), \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k,\ c_n = \left(\prod_{k=1}^{n} a_k\right)^{\frac{1}{n}}。$$

(1) 若 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則必有 $p \in N$, 使 $|a_n-\alpha| < \frac{3}{4}\ \forall n \ge p$; 取 $n_1 = 2^p - 1$, $n_2 = 2^p$, 則得 $\frac{3}{2} = |2-\frac{1}{2}| \le |a_{n_2} - a_{n_1}| = |(a_{n_2}-\alpha)-(a_{n_1}-\alpha)| \le |a_{n_2}-\alpha|+|a_{n_1}-\alpha| < \frac{3}{4}+\frac{3}{4} = \frac{3}{2}$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty} a_n$ 不存在, 即數列 $\{a_n\}$ 發散。

(2) 若 $n \in N$, 則必有 $\ell \in N$, 使 $2^\ell - 1 \le n < 2^{\ell+1}-1$, 於是易得 $\frac{2(n-\ell)}{n} < b_n < 2$。又, 由 $n \ge 2^\ell - 1 = (1+1)^\ell - 1 \ge \ell + \frac{\ell(\ell-1)}{2} > \frac{\ell^2}{2}$, 可知 $\ell < \sqrt{2n}$。合之, 即得 $2-\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < b_n < 2$, 故 $|b_n - 2| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\ \forall n \in N$。設 $\varepsilon > 0$ 已予。若取 $p \in N$, 使 $p > \frac{8}{\varepsilon^2}$, 則 $|b_n-2| < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{n}} < \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{p}} < \varepsilon\ \forall n \ge p$, 故 $\lim_{n\to\infty} b_n = 2$, 即數列 $\{b_n\}$ 收斂於 2。

(3) 注意 $n = 2^\ell - 1$ 時 $c_n = \frac{1}{2}$, $n = 2^{\ell+1}-2$ 時 $c_n = 1$, 可知數列 $\{c_n\}$ 發散: 蓋若 $\{c_n\}$ 收斂, 設 $\lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$, 則必有 $p \in N$, 使 $|c_n - \gamma| < \frac{1}{4}\ \forall n \ge p$; 取 $n_1 = 2^p - 1$, $n_2 = 2^{p+1}-2$, 則得 $\frac{1}{2} = |c_{n_2} - c_{n_1}| = |(c_{n_2}-\gamma)-(c_{n_1}-\gamma)| \le |c_{n_2}-\gamma| + |c_{n_1}-\gamma| < \frac{1}{4}+\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$, 矛盾!

由 (1)~(3), 即知數列 $\{a_n\}$ 確實合乎條件。

備註: (一) 本題實例之建構, 其難度甚高。筆者解題之策略, 係設計數列 $\{\prod_{k=1}^n a_k\}$, 使其自第 $n_1 = 2^\ell - 1$ 項至第 $n_2 = 2^{\ell+1} - 2$ 項 ($\ell \in N$) 之值, 由 $\frac{1}{2^{n_1}}$ 逐項倍增以至於1。[參考備註 (二) 所示諸例]

(二) 類似實例:

$$a_n = \begin{cases} 3^{-(2n+3)} (\text{若} n = 3^\ell - 2, \text{而} \ell \in N), \\ 3 (\text{若} n \in N \backslash \{3^\ell - 2 | \ell \in N\}); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 4^{-(3n+8)} (\text{若} n = 4^\ell - 3, \text{而} \ell \in N), \\ 4 (\text{若} n \in N \backslash \{4^\ell - 3 | \ell \in N\}); \end{cases}$$

$$a_n = \begin{cases} 5^{-(4n+15)} (\text{若} n = 5^\ell - 4, \text{而} \ell \in N), \\ 5 (\text{若} n \in N \backslash \{5^\ell - 4 | \ell \in N\}); \end{cases}$$

$\cdots$。

問題6: 試舉一數列 $\{a_n\}$, 使 $\{a_n\}$, $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱發散, 並驗證之。

解答: 令 $a_n = n^n$, $b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n a_k$, $c_n = (\prod_{k=1}^n a_k)^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$。因 $\{a_n\}$ 爲遞增數列, 故 $a_n \ge b_n$。據算術平均與幾何平均不等式, 知 $b_n \ge c_n$。顯然, $c_n \ge n$。合之, 得 $a_n \ge b_n \ge c_n \ge n\ \forall n \in N$。若 $\lim_{n\to\infty} c_n = \gamma$ 存在, 則必有 $p \in N$, 使 $|c_n - \gamma| < 1\ \forall n \ge p$, 故 $c_n = |(c_n - \gamma) + \gamma| \le |c_n - \gamma| + |\gamma| < 1 + \gamma\ \forall n \ge p$; 取 $n \in N$, 使 $n \ge p$, 且 $n \ge 1+\gamma$, 則得 $c_n < 1 + \gamma \le n \le c_n$, 矛盾! 遂知 $\lim_{n\to\infty} c_n$ 不存在, 即數列 $\{c_n\}$發散。同理, 可知數列 $\{b_n\}$ 與 $\{a_n\}$ 亦俱發散。

備註: (一) 本題之實例極易建構。

(二) 類似實例:

$$a_n = n^{2n},$$

$$a_n = n^{3n}, \ldots。$$

$$a_n = n^{n^2},$$

$$a_n = n^{n^3}, \ldots。$$

衆所周知: 逕據定義以推導驗證, 與建構合乎條件之淺顯實例, 此二者俱爲重要之數學課題。本文之作, 其意蓋在此也。

附錄 (參考試題)

茲謹提出下列試題, 供數學教師參考使用。

試題1: 證明或否證下列各命題:

(1) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$。

(2) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$。

(3) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$。

(4) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$。

(5) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$。

(6) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}} = \alpha$ 爲定數, 則 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \alpha$。

試題2: 證明及舉證:

(1) 若正項數列 $\{a_n\}$ 收斂 (即 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$ 爲定數), 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty}(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, 試證之。

(2) 試舉一發散正項數列 $\{a_n\}$, 使數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 與 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 俱收斂, 且 $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k = \lim_{n\to\infty} (\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}$, 並驗證之。

試題3: 證明或否證下列各命題:

(1) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 必收斂。

(2) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 則數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必收斂。

試題4: 證明或否證下列各命題:

(1) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 必收斂。

(2) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{a_n\}$ 收斂, 則數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必收斂。

(3) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 則數列 $\{a_n\}$ 必收斂。

(4) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 收斂, 則數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 必收斂。

(5) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 則數列 $\{a_n\}$ 必收斂。

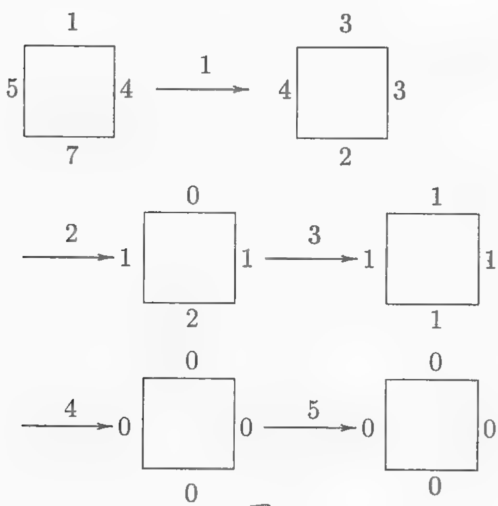
(6) 若 $a_n > 0\ \forall n \in N$, 且數列 $\{(\prod_{k=1}^{n} a_k)^{\frac{1}{n}}\}$ 收斂, 則數列 $\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k\}$ 必收斂。

—本文作者已於任教台灣大學數學系25年後退休—

四邊形上數字的妙趣

蕭守仁

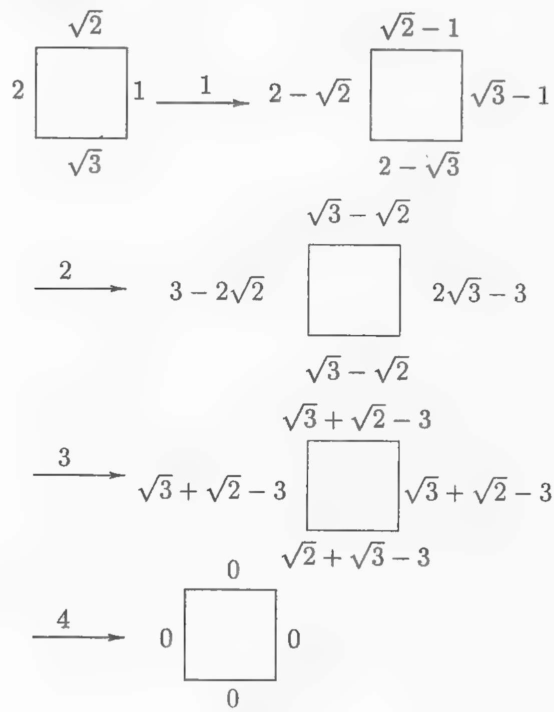
現在給你四個整數, 比如說1、4、7、5, 請將它們依序放在四邊形的各邊上, 然後進行以下的運算: 將每一邊上的數與其左邊的數相減並把相減所得的差的絕對值 (事實上就是大減小) 代替左邊的數字, 這樣就完成一次運算。如果繼續這樣運算多次, 我們將發現四邊形上的數字都變成0, 當然, 再運算一次仍是如此 (如圖一)。你可以試試別組整數, 看看是否仍有此現象。



圖一

有趣的是, 這種現象也發生在八邊形上, 更一般地, 2^n 邊形上都有此現象, 各位讀者不妨試試八邊形的例子, 雖然可能需要運算很多次, 但最後各邊總是能變成全是0。接下來請你試著證明它吧! 有興趣的讀者請參考 [1]。不過, 這些現象都要求參與運算的數字是整數, 如果不是整數還有此現象嗎? 以四邊形爲例, 比如說各邊上的數字分別爲 $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, 事實上此情形和各邊上的數字分別爲 10、8、15、2 是沒有差別的 (將每一個數同乘以 20), 因此, 各邊皆爲分數 (有理數) 的情形和整數相同, 經運算多次後, 各邊總是能全變成 0, 所以一個有意思的問法是: 如果不全爲分數, 情形是如何呢?

下面圖二是各邊分別爲 $\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{3}$, 2 的情形



圖二

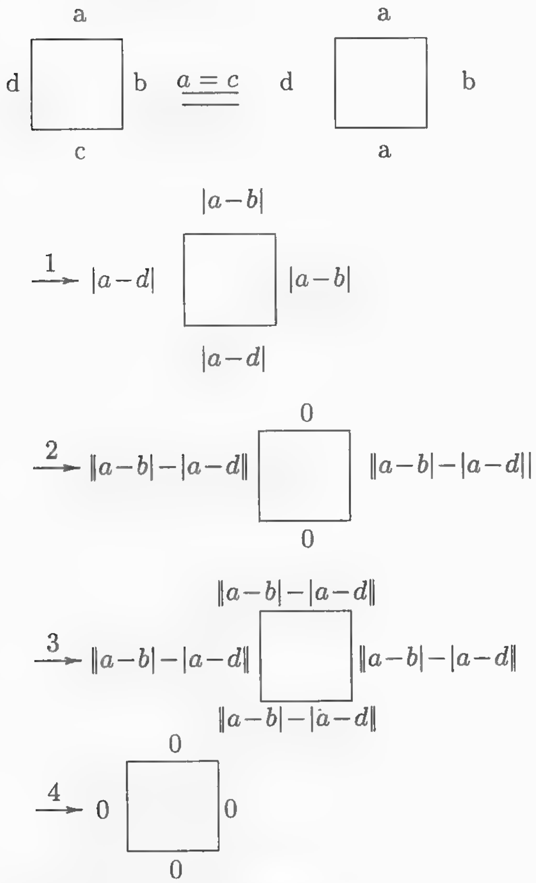
這個例子又加強了“最後總是全變爲0”

這個猜想的正確性, 本文將就四邊形的情形深入探討。

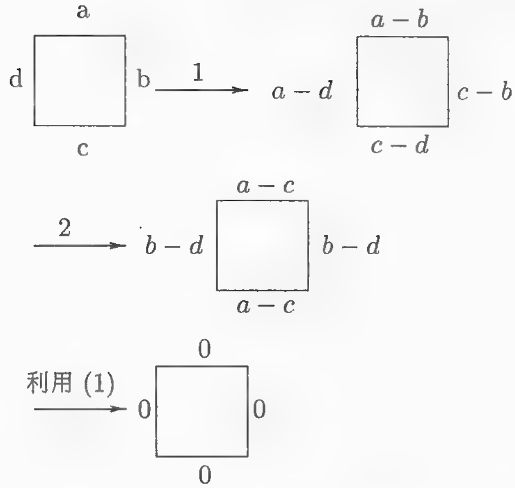
一、準備工作

首先不妨假設有4個非負實數 a, b, c, d 置於四邊形上 (因爲經一次運算後, 各邊皆變成非負實數), 以下細分成幾種情形來討論。

(1) $a = c$ 時,

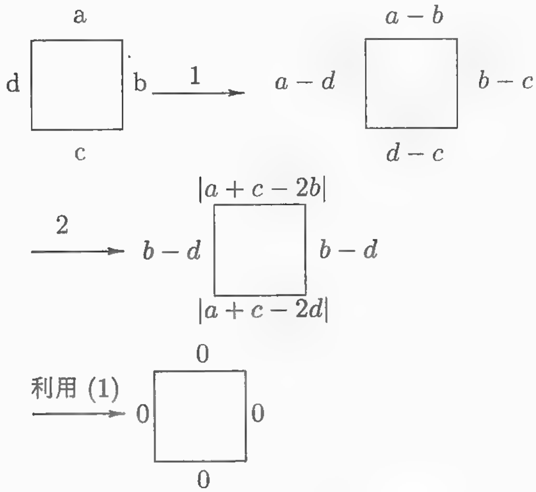


(2) $a \geq c \geq b \geq d$ 時,



(3) $a \geq c \geq d \geq b$ 時, 類似於 (2) 的情形, 最後各邊皆爲0。

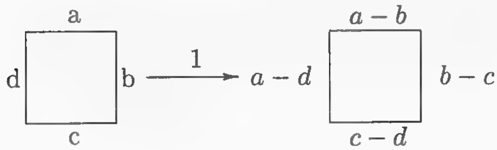
(4) $a \geq b \geq d \geq c$ 時,



(5) $a \geq d \geq b \geq c$ 時, 類似於 (4) 的情形, 最後各邊皆爲0。

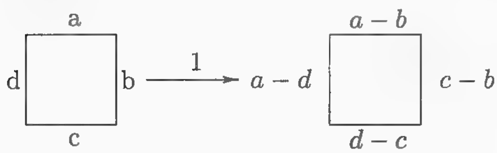
請注意, 前列的各種情形的最後結果都是各邊皆爲0, 此與是否爲整數無關。現在只剩下兩種情形尚待討論。

(6) $a \geq b \geq c \geq d$ 時, 經過一次運算結果如下,



請注意 $a-d=(a-b)+(b-c)+(c-d)$, 也就是說 $a-d$ 是其中最大者, 因此由 (1), (2),(3),(4), (5) 的討論可知, 除非 $a-b\ge b-c\ge c-d$ 或 $c-d\ge b-c\ge a-b$, 否則最後各邊仍將全爲0。

(7) $a\ge d\ge c\ge b$ 時, 情形類似於 (6),



其中 $a-b=(a-d)+(d-c)+(c-b)$, 因此 $a-b$ 爲最大項, 由 (1) $\sim$ (5) 的討論可知, 除非 $a-d\ge d-c\ge c-b$ 或 $c-b\ge d-c\ge a-d$, 否則最後各邊仍將全爲0。

二、進一步的討論

由前一節的討論可以知道:

1. 不管一開始的數字爲何, 運算過程中一出現 (1) $\sim$ (5) 任一種情形, 最後結果便是全爲0。
2. 爲使每一次運算的結果不是全爲0, 除非每次的結果都能如 (6) 或 (7) 的情形。

現在讓我們假設 $a\ge b\ge c\ge d$ 且經一次運算後有 $a-d\ge a-b\ge b-c\ge c-d$ ($a-d\ge c-d\ge b-c\ge a-b$ 的情形也請仿此討論之), 因此不妨一開始設四個數爲 $a_0+b_0+c_0$, a_0,b_0,c_0 且 $a_0\ge b_0\ge c_0\ge 0$, 經過一次運算後變成 b_0+c_0, a_0-b_0, b_0-c_0, a_0+b_0, 顯然 a_0+b_0 最大而且 $b_0+c_0\ge b_0-c_0$, 因此如果 (1) $\sim$ (5) 沒有發生, 則必然有$a_0+b_0\ge b_0+c_0\ge a_0-b_0\ge b_0-c_0$。不妨設 $a_1=b_0+c_0$, $b_1=a_0-b_0$, $c_1=b_0-c_0$, 則新的數可寫成 $a_1+b_1+c_1$,a_1,b_1,c_1 而且 $a_1\ge b_1\ge c_1\ge 0$, 在此也請注意到, 如果 $c_0=0$, 那麼 $a_1=c_1$, 此爲 (1) 的情形。因此, 如果一直保持在 (6) 或 (7) 的情形, 則必須 $c_0>0$, 同理 $c_1>0$。因此如果 (1) $\sim$ (5) 都沒有出現, 那麼對於任意正整數 n 必然有

$$(2.1)\quad a_n=b_{n-1}+c_{n-1},\ b_n=a_{n-1}-b_{n-1},\ c_n=b_{n-1}-c_{n-1}\ \text{且}\ a_n>b_n>c_n>0,\ a_0>b_0>c_0>0。$$

三、解決數學問題

現在我們已經把問題化約成“數學”的形式: 是否存在 a_0,b_0,c_0 滿足 (2.1) 的要求呢? 首先注意到 $a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}<a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}$, 也就是說 $a_n+b_n+c_n$ 是嚴格遞減, 因此 $a_n+b_n+c_n$ 的 的極限值存在, 設爲m, 則可表示成

$$\begin{aligned} m &= \lim_{n\to\infty}(a_n+b_n+c_n) \\ &= \lim_{n\to\infty}(a_{n-1}+b_{n-1}+c_{n-1}) \end{aligned}$$

但是$a_n+b_n+c_n=a_{n-1}+b_{n-1}$, 因此

$$\lim_{n\to\infty} c_{n-1}=m-m=0$$

又因為$c_n = b_{n-1} - c_{n-1}$, 故有

$$\lim_{n\to\infty} b_{n-1} = \lim_{n\to\infty}(c_n + c_{n-1}) = 0$$

進而

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}(b_{n-1} + c_{n-1}) = 0$$

因此

$$(3.1)\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} c_n = 0$$

這是很有用的觀察, 以下將用它來求 a_0, b_0, c_0。把 (2.1) 寫成矩陣的形式

$$(3.2)\qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{n-1} \\ b_{n-1} \\ c_{n-1} \end{pmatrix}$$

因此

$$(3.3)\qquad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}^n \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix}$$

(接下來的部分需要一些矩陣的理論, 不熟悉的讀者請跳過, 在附錄裡有較基礎的推導, 請參考)。稱 $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ 為矩陣 A, 考慮將 A 對角化, 矩陣 A 的特徵方程式是

$$f(\lambda) = \begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 1 \\ 1 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

即 $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 2 = 0$。利用堪根定理仔細檢查可以知道此方程式有一個小於 1 的正實根, 設為 α, 另二根為共軛複數根 β, γ, 但 $|\beta| = |\gamma| > 1$, 所以由 (3.3) 不難知道 a_n, b_n, c_n 可表示成以下形式

$$\begin{aligned} a_n &= \ell_1\alpha^n + \ell_2\beta^n + \ell_3\gamma^n \\ b_n &= m_1\alpha^n + m_2\beta^n + m_3\gamma^n \\ c_n &= n_1\alpha^n + n_2\beta^n + n_3\gamma^n \end{aligned}$$

但是 $|\alpha| < 1$ 且由 (3.1) 可知

$$\ell_2\beta^n + \ell_3\gamma^n \to 0 \text{ 當 } n \to \infty$$

因為 $|\beta| > 1$ 且 $|\gamma| > 1$, 因此若假設 $\ell_2 \neq 0$, 那麼 $\ell_3 \neq 0$, 而且

$$1 + \frac{\ell_3}{\ell_2}\Big(\frac{\gamma}{\beta}\Big)^n \to 0 \text{ 當 } n \to \infty$$

即有

$$\Big(\frac{\gamma}{\beta}\Big)^n \to -\frac{\ell_2}{\ell_3} \text{ 當 } n \to \infty$$

但 $|\frac{\gamma}{\beta}| = 1$, 因此 $\frac{\gamma}{\beta} = 1$, 但這是不可能的 (因為 β, γ 為共軛複數), 故 $\ell_2 = \ell_3 = 0$, 同理 $m_2 = m_3 = 0$, $n_2 = n_3 = 0$, 所以 a_n, b_n, c_n, 可寫成

$$(3.4)\qquad a_n = \ell_1\alpha^n, b_n = m_1\alpha^n, c_n = n_1\alpha^n$$

再利用 (3.2) 即得知

$$(3.5)\qquad \alpha \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$$

因此 $\begin{pmatrix} \ell_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{pmatrix}$ 是矩陣 A 對應於特徵值 α 的特徵向量, 請注意由 (3.2) 和 (3.5) 不難看出

$$(a_0, b_0, c_0) = (\ell_1, m_1, n_1)$$

現在尙有兩件事必須驗證, 首先必須說明可以找到適當的ℓ_1, m_1, n_1 使得 $\ell_1 > m_1 > n_1 > 0$, 再者必須說明 $a_n > b_n > c_n > 0$, 事實上, 只要證明可以找到 $\ell_1 > m_1 > n_1$, 則由 (3.4) 即可得證 $a_n > b_n > c_n > 0$。利用 (3.5), ℓ_1, m_1, n_1 滿足

$$-\alpha\ell_1 + m_1 + n_1 = 0$$
$$\ell_1 + (-1-\alpha)m_1 = 0$$
$$m_1 + (-1-\alpha)n_1 = 0$$

因此

$$\ell_1 = (1+\alpha)m_1$$
$$n_1 = \frac{1}{1+\alpha}m_1 \qquad (3.6)$$

若取 $m_1 > 0$, 則因爲 $0 < \alpha < 1$ 而有 $\ell_1 > m_1 > n_1 > 0$, 而且 $l_1 : m_1 : n_1 = (1+\alpha)^2 : (1+\alpha) : 1$。如果令 $\beta = 1+\alpha$, 則 β 是滿足 $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ 的唯一正實根。現在可以寫出以下的結論:

1. 如果4個數 a, b, c, d 滿足 (1) ~ (5) 任一種情形, 經過有限次運算後必全爲0。
2. 如果4個數 a, b, c, d 滿足 (6) 或 (7) 的情形, 且經過一次運算後, 仍符合 (6) 或 (7), 並設依大小排列成, $a_0 + b_0 + c_0$, a_0, b_0, c_0, (i) 若 $a_0 > b_0 > c_0 > 0$ 且 $a_0 : b_0 : c_0 = \beta^2 : \beta : 1$, 其中 β 是 $\lambda^3 = \lambda^2 + \lambda + 1$ 的正實根, 則經任意多次運算, 四邊形上的數仍全不爲0。(但其極限確實全爲0),(ii) 否則經有限次運算後仍將全爲0。

四、未完成的工作

雖然就四邊形而言, 已經能夠完全判斷四邊形上的數能否在有限次運算後全變爲0, 但是對於那些在有限次運算後全變爲0的情形還不能事先知道需要運算幾次, 再者, 是不是任給一個正整數 n, 總是能給出一組數 (四個實數 a, b, c, d) 使得恰好經過 n 次運算後全部變爲0? 當然, 有興趣的讀者一定也會問一般 2^n 邊形上的數的情形又是如何呢? 這些問題筆者也不清楚, 或許你能給出完整的答案!

附錄:

對於遞迴式 (2.1) 有一個比較基礎的解法。首先由 (2.1) 可得 $a_{n-1} = b_n + b_{n-1}$, 因此 $b_{n+1} + b_n = b_{n-1} + c_{n-1}$, 再由 $b_{n-1} = c_n + c_{n-1}$, 進一步得到 $c_{n+2} + c_{n+1} + c_{n+1} + c_n = c_n + c_{n-1} + c_{n-1}$, 也就是

$$c_{n+2} + 2c_{n+1} - 2c_{n-1} = 0$$

用一般解線性遞迴式的方法, 先解 $x^3 + 2x^2 - 2 = 0$。(此方程式和正文中的矩陣 A 的特徵方程式相同) 由堪根定理, 不難得知其有一小於1的正實根 α, 另有兩個共軛複數根 β, γ, 且 $|\beta| > 1$。因此

$$c_n = n_1\alpha^n + n_2\beta^n + n_3\gamma^n$$

但是由 (3.1) 知道 $lim_{n\to\infty}c_n = 0$, 所以當 $n \to \infty$ 時, $n_2\beta^n + n_3\gamma^n \to 0$。此時如果 $n_2 \neq 0$,, 那麼因爲 $|\beta| > 1$, 所

以 $n_3 \neq 0$, 而有 $(\frac{\gamma}{\beta})^n \to -\frac{n_2}{n_3}$, 進而可得 $\frac{\gamma}{\beta} = 1$ (因爲 $(\frac{\gamma}{\beta})^{n+1} = \frac{\gamma}{\beta} \cdot (\frac{\gamma}{\beta})^n$ 而 $(\frac{\gamma}{\beta})^{n+1} \to -\frac{n_2}{n_3}$, $(\frac{\gamma}{\beta})^n \to -\frac{n_2}{n_3}$) 但 β, γ 爲共軛複數, 所以這是不可能的, 因此可知 $n_2 = n_3 = 0$。現在可以知道, 事實上 $c_n = n_1\alpha^n$, 再利用 (2.1) 可得 $b_n = c_{n+1} + c_n = n_1\alpha^{n+1} + n_1\alpha^n = (1+\alpha)n_1\alpha^n$ 而 $a_n = b_{n+1} + b_n = (1+\alpha)^2 n_1\alpha^n$。請注意到 $c_0 = n_1$, $b_0 = (1+\alpha)n_1$, $a_0 = (1+\alpha)^n n_1$, 因此只要取任一 $n_1 > 0$, 就有 $a_0 > b_0 > 0$, 且 $a_n > b_n > c_n > 0$。

参考資料

1. 方塊數論, 中華民國第三十五屆科學展覽高中組第三名作品, 張建祥、王重凱 (作者), 林漢良、王玲玉 (指導老師)。

—本文作者任教於彰化師大數學系—

黃金分割的審美價值

張 雄

據數學史記載, “黃金分割”是由公元前6世紀古希臘哲學家、數學家畢達哥拉斯及其學派發現的。歐幾里得「幾何原本」第二卷是述說畢氏及其弟子的著述, 其中第十一節寫道:“以點 H 按中末比截直線 AB, 使成黃金分割, 即 $AB : AH = AH : HB$”。「幾何原本」中還給出了求得黃金比的五種方法。

若設 $AB = 1$, $AH = x$, 則上面等式變爲 $1 \cdot x = x \cdot (1-x)$, 即 $x^2 = 1 \cdot (1-x)$, 整理得一元二次方程 $x^2 + x - 1 = 0$, 解之得 $x = \frac{\sqrt{5}-1}{2} \approx 0.618$。

0.618 叫做“黃金數”。而“黃金比”這個名稱爲古希臘著名哲學家柏拉圖所命名。在歐洲又把“黃金比”稱爲黃金分割律”, 並且這一名稱是由19世紀德國美學家蔡辛提出來的。他深入研究了這一比例, 認爲黃金分割無論在藝術, 還是在自然中都是形式美的最佳比例關係。

畢達哥拉斯學派關於“美是和諧的比例”的美學觀點, 自古到今始終被美學家作爲形式美的一條法則。而如今連中學生都十分熟悉的黃金分割, 卻是何等誘人! 其中有

著深奧的機理。中世紀德國數學家、天文學家開普勒指出: “幾何學中有兩件瑰寶, 一是畢達哥拉斯定理, 一是黃金分割律”, 他宣稱黃金分割是造物主賜予自然界傳宗接代的美妙之意 [1]。文藝復興時期, 黃金分割被視爲最神聖的比例。例如達 · 芬奇在「論繪畫」一書中指出: “美感完全建立在各部分之間神聖比例的關係上, 各特徵必須同時作用, 才能產生使觀衆往往如醉如痴的和諧比例” [2]。黃金分割在數學、美學、人體、藝術、自然中顯示出巨大的作用, 推動了人們在它指導下去認識世界和改造世界。難怪16世紀威尼斯數學家帕喬里稱之爲 “神賜的比例”。

黃金分割自產生起就成爲一條公認的著名美學定律, 被廣泛應用於音樂、繪畫、雕塑等藝術形式和建築之中。例如, 古希臘雅典的巴特農神殿, 就是按黃金分割比例來建造神殿的 (大理石柱廊高恰好占整個神殿高度的 0.618)。古埃及修建的胡夫大金字塔, 其高與底部正方形邊長之比爲 0.62。埃菲爾建造巴黎大鐵塔在比例上應用的也是黃金分割法。現在, 人們常在高塔的黃金分割點處建造樓閣或設置平臺, 能使平直、單調的塔身變得多彩多姿, 而在摩天大樓的黃金分割點處設置腰線或裝飾物, 則可使整個樓顯得宏偉而雅緻。拿藝術作品來說, 古希臘時代著名的雕塑: 米洛斯的納維斯女神塑像、智慧女神雅典娜和太陽神阿波羅塑像, 是故意延長雙腿, 使肚臍到脚底的高度與全身高度之比爲 0.618。因爲藝術家早就發現人的形體以下肢與身高之比爲 0.618 爲最美, 但生活中這樣的形體比例很少, 所以詩人荷馬早就指出: “單憑擴大腿和脚的尺度, 就可以產生一種崇高的儀容 [3]。達 · 芬奇、提香、菩切提利的作品中的許多比例關係, 也爲 0.618。

如今, 黃金分割的審美價値和應用範圍在不斷擴大。在舞臺表演上, 演員如果站在舞臺的黃金分割點處, 聽衆在臺下就感覺很勻稱, 而且聲音的傳播效果也最好。在演奏樂器時, 如果將二胡上的“千斤”放在琴弦的黃金分割點處, 則音樂可達到最佳。由於符合寬、長之比爲 0.618 的矩形被普遍認爲是美的 (畢氏學派曾作了大量實驗), 因此, 後世人也認爲在工藝美術和日常用品的長寬設計中採用這個比例, 就能引起美感, 令人賞心悅目, 如書本、櫃櫥、門窗等。據錢仁康教授說: “藝術上的‘黃金分割’比例, 和音樂中高潮的位置有密切關係。我們分析許多著名的音樂作品, 發覺其中高潮的出現, 大多和黃金分割點相接近。” 劉大白的「詩外形律詳說」則認爲, “詩歌中的五音停和七音停最接近於黃金分割” [4]。象徵主義詩人馬拉美甚至認爲, 美的詩歌其“印刷符號”也“應依黃金分割律排列”。一些書法家在論及書法時認爲, 漢字結構的重心大多數宜在偏左上方, 以符合黃金分割律爲美。啓功先生在「論書絕句百首」中有詩云: “用筆何爲結字難, 縱橫聚散最相關。一從證及黃金律, 頓覺金牛骨隙寬。”

饒有興趣的是, 植物學家們觀察到某些植物的生長也是按黃金分割的序列排列的。當一株嫩芽抽枝吐葉時, 如果從這株嫩枝的頂端看下去, 可以看到葉子的排列成一對數螺線, 而葉子在螺旋線上的距離恰好符合黃金分割。人們按照車前草葉形排列的數學模

式設計出來的螺旋形高樓大廈, 每一房間都能得到充足的陽光。無獨有偶, 向日葵的種子也是按特定的對數螺線弧排列的, 而它們在螺旋線上的距離竟也服從黃金分割規律。其實, 中世紀意大利數學家菲波那契就發現美妙的植物葉片、花瓣、松果殼瓣從小到大的序列即是以 0.618 : 1 的近似值排列的。現代科學家還發現, 當大腦呈現的“貝他”腦電波, 其低頻率與高頻率之比是 0.618 的近似值 (8 赫茲與 12.9 赫茲之比) 時, 人的心身最具快感。甚至, 當大自然的氣溫在攝氏 23 度與人的體溫 37 度之比爲 0.618 時, 這氣溫就是最適宜於人的身心, 最使人感到舒適。在現代最優化理論中, 黃金分割能使我們用較少的實驗找到合適的工藝條件或合理的配方。可見, 黃金分割的審美價值已遠遠超出了藝術的範疇, 物質世界的組成、大地萬物的誕生以及世間的許多事物, 都和黃金分割有著千絲萬縷的關係。它不僅是哲學的領悟、數學的技巧和藝術的完美之間最驚人的結合, 而且還是構成世界與宇宙原動力的內部規律。它體現著人類能感覺到的蘊藏在這個世界之後的神奇結構和深奧理性。

然而, 黃金分割爲什麼成爲人們普遍喜愛的一種美的比例關係呢? 這始終被染著瑰麗詭秘的色彩。兩千五百年來, 人們用各種方式企圖給予理論上的論證, 但都不很成功。德國近代實驗美學家費希納曾根據黃金分割原理作心理學實驗, 發現在用於實驗的幾何圖形中, 最被人喜愛的比例關係十分接近黃金分割。但這仍未揭示出黃金分割具有審美價值的深層原因。後來從人類本身尋找答案的觀點得到人們的普遍接受。古今中外許多著名的稱之爲“美” 的建築, 大都是模擬自然界的傑作, 如我國“擬天”的傑作: 北京天壇, 1975年美國芝加哥的“擬山”的世界最高建築西爾斯大樓 (高440米110層, 蘇[illegible]設計), 1973年奧大利亞的悉尼歌劇院的“擬海”建築,“科威特之塔”的“擬月”。陳聲海提出, 人們最熟悉、最喜愛、最尊敬、接觸最頻繁的還是人類自身, 因而在建築藝術中也要“擬人”[5]。例如古今中外的絕大部分宮殿、廟宇、陵墓、紀念堂及一部分城市均採用了“左右對稱, 前後有別, 上下迴異”的“人體式”布局。人體形象中間高, 兩旁低的特徵, 被模擬到建築物上就形成對稱布置的中高兩低的“横向三段式”。有的則進一步模擬人們歡迎或擁抱的姿態, 使建築物形成左右對稱中間高、左右高低錯落並靠前、平面略呈“I”或“王”字形的“横向五段或七段” 式的布局。還有模擬人體“上段小, 中段大而實, 下段虛長”的“垂直三段式”布局, 北京“四合院”從布局上則模擬了人們牽兒帶女的家庭序列。50年代, 北京工業設計院編寫了一本「建築資料集」收集了我國各地成年人人體尺寸的調查, 男性中等人體軀幹部分寬高比爲 1 : 1.61878, 高中低三類人體平均計算其比爲 1 : 1.61, 女性也差不多。世界各地民族體高差別較大, 但軀幹部分的寬高比都接近 1 : 1.618, 並且人類在進化過程中其軀幹部分變化也最小。自古至今人們十分崇尚人體美, 特別是古希臘民族, 社會上不少專家、學者研究人體美。正因爲黃金分割符合人體的寬高比, 人類在長期社會實踐中, 它與人

的特殊生理和心理結構形成了協調關係, 因而對它感到習慣進而轉爲喜愛, 並形成"擬人化"的審美尺度。這與普羅塔哥拉提出的"人是萬物的尺度" 這一著名命題相一致, 這是一個不同於自然本體論的人本學命題。

除上述觀點外, 筆者還認爲, 黃金分割之所以具有審美價值, 是在於黃金分割是一種自然界的客觀規律。如果僅僅把黃金分割的審美價值歸之於它符合人身軀幹寬高之比這樣的審美"擬人化", 那麼, 黃金分割在生物學上和其它一些科學技術上的意義將無法解釋。如前所述, 許多植物都按此比例生長, 葉子或枝條在枝幹上呈螺旋上昇中, 如果把第一片葉子在水平面上的投影作爲計算角度的起點, 那麼第二片葉子的投影恰好在這個周角的黃金分割處, 即相鄰兩片葉子投影間的夾角爲 $(1-\frac{\sqrt{5}-1}{2})360^\circ \approx 137.50776^\circ$。因爲 $\sqrt{5}$ 是無理數即無限不循環小數, 故這樣分布可以保證下面的任何一片葉子永遠不會被上面的某一片葉子所完全覆蓋, 這就可使下面的葉子得到足夠的光照。植物怎麼知道黃金分割或擬人呢? 筆者的觀點是, 黃金分割是自然界固有的一種規律, 具有"天然合理"的意義, 它同其他自然規律一樣, 被人類在長期的生活實踐活動中所逐漸認識和發現, 同時審美活動又要符合自然規律, 從而便使黃金分割賦于了審美價值。這說明了黃金分割是"自然人化"的結果, 其中體現著人的本質力量和自由形式。也證實了黃金分割的數學美學意義及理性特徵。

參考文獻

1. [1][3][4] 丁文復, 黃金分割及其應用, 「美育」, 1983年第3期。
2. [2] 徐本順、殷啓正, 數學中的美學方法, 江蘇教育出版社, 1991年版, 第90頁。
3. [5] 陳聲海, 建築藝術中的模擬、擬人傾向, 「潛科學」, 1981年第1期, 「光明日報」, 1981年7月21日。

—本文作者任教於中國陝西教育學院數學系—

試算表與完全數的探究

文耀光 • 江紹祥

1. 引言

隨著電腦科技及軟件的發展, 利用電腦代數系統或試算表進行數學教學、探究或解難已逐漸受到教育界的重視 (參考 [1]、[2]、[3])。相信讀者亦會同意, 利用電腦軟件代替人手去執行繁複的運算, 會節省很多時間, 讓學習者的注意力可以集中在數學概念的學習或探究本身。當然, 在現今科技發展迅速的時代, 電腦在運算速度和儲存數據方面仍然有不少的限制 (limitations), 未能完全取替人類的邏輯思考和演繹推理的部份, 所以當前教育界強調的電腦輔助教學中, 老師或家長仍然要扮演一個重要的角色, 就是一個有清晰教學目標和明瞭學生學習程度的指導者 (instructor) 及催化學習者 (facilitator)。

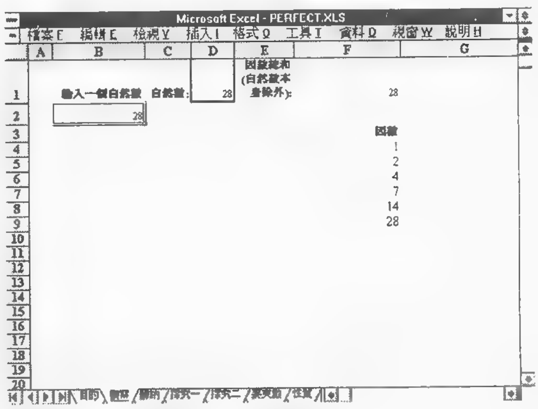
本文旨在向讀者介紹如何利用 Microsoft Excel 探究「完全數」(Perfect Numbers) 的性質、認識何謂麥爽數 (Mersenne Numbers)、了解當今大型電腦尋找麥爽質數的方法、 和認識試算表在運算上的一些限制, 希望爲有興趣利用試算表進行數學教學的師長或探究的朋友提供一個參考示例, 日後能製作更多更佳的電腦輔助學習數學軟件, 是本文作者的最大目的。

2. 觀察自然數的因數之和

本節會介紹如何引導學生觀察自然數的因數之和, 從而歸納出某類自然數的一些有趣性質, 爲認識完全數打好基礎。

探究活動:

步驟 (一): 用滑鼠指向「觀察」標籤並單擊, 畫面會轉置到工作紙「觀察」, 如圖一。先在儲存格 $B2$ 任意鍵入一個自然數, 例如 28, 那麼這個數的所有正因數都會在 F4 儲存格以下自動出現, 最後在 F1 格出現的數字便是所有小於該鍵入自然數的正因數之和。



圖一

提問: 請問這個和是否等於鍵入之自然數?

(答案: 是。)

步驟 (二): 試逐次鍵入 1 至 30 範圍以內的自然數, 重複上述步驟並完成下表。

鍵入的數	因數之和 (不包括鍵入的數本身)	鍵入的數	因數之和 (不包括鍵入的數本身)
1		16	
2		17	
3		18	
4		19	
5		20	
6		21	
7		22	
8		23	
9		24	
10		25	
11		26	
12		27	
13		28	
14		29	
15		30	

表一

3. 歸納定義

基於表一的結果, 教師可以引導學生爲「完全數」下定義。

探究活動:

步驟 (一): 試利用表一的結果, 觀察 1 至 30 以內有那些自然數剛好等於所有比它少的正因數之和。

提問: 請寫出這些數字, 並嘗試爲這類自然數命名。

(答案: 6 和 28。)

教師講述:

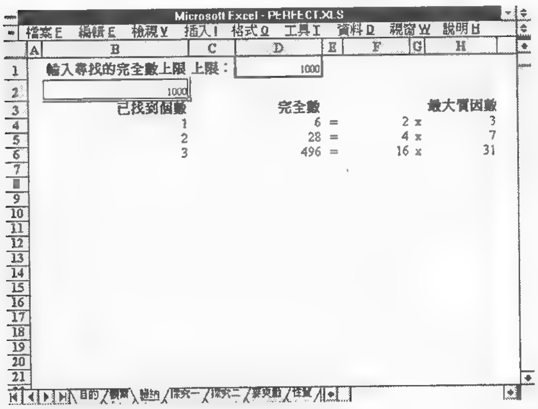
早在古希臘時代, 哲學家柏拉圖 (Plato) 已在他的著作《理想國》裡提出了「完全數」(Perfect Numbers) 這個概念, 因爲古希臘人心目中最理想、最完全的正整數是恰好等於這個數的所有因數 (本身除外) 相加。他們認爲這些完全數具有神秘的意義, 能夠反映宇宙的和諧。當時的希臘數學家發現的完全數共有 4 個, 包括 6、28、496 和 8128。到1456年, 才發現了第 5 個完全數 33550336, 可謂進展緩慢。直至1996年爲止, 藉著大型電腦的幫助, 尋找到的完全數亦僅有 35 個, 而且都是偶數。

4. 觀察偶完全數的形式

基於上述的探究活動及表一的結果, 教師可以再進一步引進下列的探究活動, 希望學生能自行歸納出偶完全數的一般形式。

探究活動:

步驟 (一): 用滑鼠指向「歸納」標籤並單擊, 畫面會轉置到工作紙「歸納」。在儲存格 $B2$ 鍵入一個 1000 以內的自然數, 如圖二。試觀察 F、G、H 欄出現之完全數的因數分解式, 並嘗試歸納偶完全數出現的一般形式。

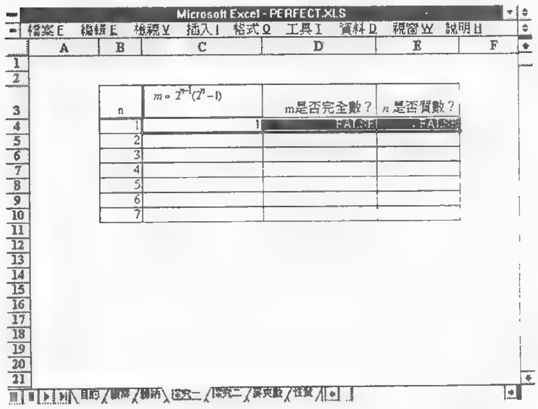


圖二

提問: 請描述偶完全數之一般形式。

(答案: $2^{n-1}(2^n-1)$, 其中 n 爲自然數。)

步驟 (二): 用滑鼠指向「探究一」標籤並單擊, 畫面會轉置到工作紙「探究一」, 如圖三。先選擇 $C4$ 至 $E4$ 範圍, 將滑鼠放在 $E4$ 右下角十字處, 然後按滑鼠左鍵向下拖曳至儲存格 $E10$ 並放手。在儲存 $D4$ 欄至 $D10$ 會自動顯示 $2^{n-1}(2^n-1)$ 是否完全數, 而在儲存格 $E4$ 至 $E10$ 會自動顯示 n 是否質數。試觀察 D 欄及 E 欄顯示之結果。

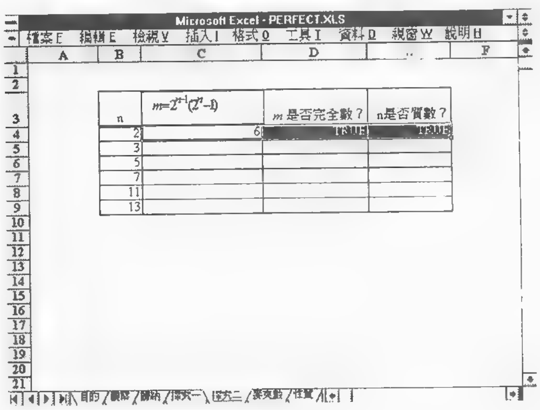


圖三

提問: 試歸納 n 是甚麼數的時候, $2^{n-1}(2^n-1)$ 有可能是完全數?

(答案: 質數。)

步驟 (三): 用滑鼠指向「探究二」標籤並單擊, 畫面會轉置到工作紙「探究二」, 如圖四。先選擇 $C4$ 至 $E4$ 範圍, 將滑鼠放在 $E4$ 右下角十字處, 然後按滑鼠左鍵向下拖曳至儲存格 $E10$ 並放手。試觀察 D 欄及 E 欄顯示之結果。



圖四

提問: 請問 n 是質數的時候, $2^{n-1}(2^n-1)$ 是否一定是完全數?

(答案: 否。例如: 當 $n=11$ 時, $2^{10}(2^{11}-1)$ 並不是完全數。)

5. 尋找麥爽質數

在進一步的探究活動之前, 教師先敍述一些經典的結果, 讓學習者了解偶完全數和麥爽質數的關係, 及尋找麥爽質數的方法。

教師講述:

歐拉定理: *凡偶完全數都是以下面的形式出現: $2^{n-1}(2^n-1)$, 其中 2^n-1 是質數。*

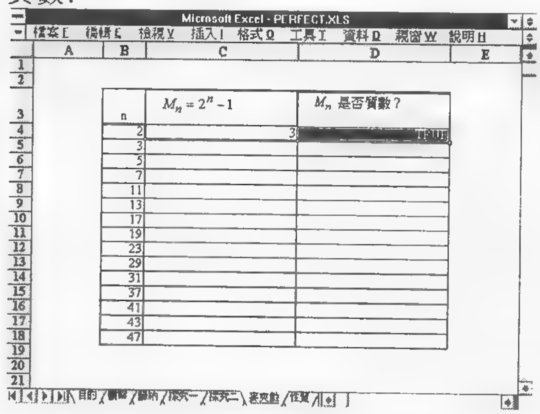
另外, 數學家亦証明了以下的定理:

定理: *如果 2^n-1 是質數, 那麼 n 必定是質數。*

但是要注意, 當 n 是質數時, 2^n-1 不一定是質數。因此要尋找偶完全數就變成找某一些質數 n, 使得 2^n-1 是一個質數。我們稱形如 $M_n=2^n-1$ 的數爲麥爽數 (Mersenne Numbers)。麥爽 (M.Mersenne 1588-1648) 是法國巴黎的一個神學家及數學家, 他是最早尋找麥爽質數的人。直至十八世紀, 已經驗證是質數的麥爽數有 8 個, 分別當 n 等 2、3、5、7、13、17、19 和 31 的時候。1978年底, 美國加洲兩個大學生利用電腦證明了 $2^{21701}-1$ (即第 25 個麥爽質數) 是質數。直到1996年爲止, 共發現了 35 個麥爽質數 (第35個麥爽質數是 $2^{1398269}-1$), 也是透過紹級電腦的幫助及長時間的運算而尋找得到的。

探究活動:

步驟 (一): 用滑鼠指向「麥爽數」標籤並單擊, 畫面會轉置到工作紙「麥爽數」, 如圖五。用滑鼠指向儲存格 $C4$ 並拖曳至儲存格 $D4$, 然後下拉至儲存格 $D18$。試觀察當 n 在 1 至 50 範圍以內時, 有多少個麥爽數 M_n 是質數?



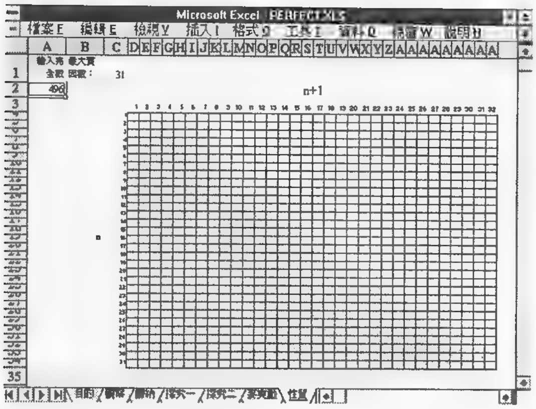
圖五

6. 探究完全數的有趣性質

完全數有很多有趣的性質, 教師可以引導學生加以探究。以下是其中一個例子:

探究活動:

步驟 (一): 用滑鼠指向「性質」標籤並單擊, 畫面會轉置到工作紙「性質」, 如圖六。請在儲存格 $A2$ 鍵入一個已知的偶完全數 ($1-1000$ 範圍以內)。儲存格 $C1$ 會自動顯示這個偶完全數的質因數。試觀察畫面中央的長方形, 並回答以下的問題:



圖六

提問: 請問圖中顯示的長方形面積與鍵入之偶完全數有甚麼關係?

(答案: 等於該偶完全數的兩倍。)

提問: 圖中顯示的三角形面積與鍵入之偶完全數有甚麼關係?

(答案: 兩者相等。)

提問: 偶完全數是否一定是三角形數? 試給予解釋。

(答案: 是。因爲 $2^{n-1}(2^n-1)$ 可以 $m(m+1)/2$ 的形式表示, 其中 $m=2^n-1$。)

7. 總結及討論

本文旨在介紹如何利用 Microsoft Excel 去引導學生探究完全數的基本性質、認識何謂麥爽數, 並了解尋找完全數在歷史上的進展過程。教師在設計此類型的試算表工作紙的時候, 有幾點原則值得注意: (1) 教材設計要符合學生的數學學習程度, 避免過深或過淺; (2) 儘量引導學生自己發現數學概念, 取替教師直述定義的模式; (3) 善用試算表的計算及繪圖功能, 增加學生學習時的互動性 (Interactivness) 和趣味性;(4) 在適當時候使用試算表的巨集 (Macro), 減省學生繁複的輸入指令 (Input commands), 讓學生的注意力可以集中在數學概念的學習或探究本身。

以下是與本文相關的一些補充資料, 供讀者參考之用:

討論 (一):

目前第 9 個麥爽質數 $2^{61}-1$, 在 Windows 3.1 版本下運作的 Excel 5.0 會誤算出它是合成數。這是由於 Excel 的內儲整數位值的限制, 所以任何大於 $2^{49}-1$ 的質數都不可能被正確試驗出。因此 Excel 5.0 只能有限地應用於課堂中作爲探究的工具, 某些需要多位值的數字運算必須依賴另一類高計算軟件幫助, 例如 Maple 或 Mathematica 之類的電腦代數系統。以檢驗麥爽質數爲例, Excel 5.0 只能準確計算到第 8 個麥爽質數 $2^{31}-1$, 而 Maple[1] 可以在小於兩分鐘內計算到第 14 個麥爽質數 $2^{607}-1$, 其位數 (number of digits) 有 183 位。如果測試時間延長至 30 鐘, Maple 亦可以準確計算到第 33 個麥爽質數 $2^{859433}-1$。有興趣的讀者可以參加國際網絡 Internet 上的 GIMPS(Great Internet Mersenne Prime Search) 的義工, 共同尋找新的麥爽質數。

討論 (二):

[1]測試是在 Pentium 133MHz (48Mb RAM) 的微型電腦上進行。

在工作紙「麥爽數」中, 我們曾經運用到一個自設的函數 isprime, 其算法 (algorithm) 是應用了愛氏篩原理。有興趣的讀者可以參考基本的數論著作 (例如:[4]、[5]) 或專門討論算法的書籍 (例如:[6])。

討論 (三):

現今所找到的完全數都是偶數, 會不會有奇完全數存在呢? 至今還沒有人能回答。不過, 有數學家曾經證明到:「如果存在奇完全數, 它必定大過 10^{300}, 且最少有 8 個不同的質因子。」由此看來, 單靠筆算是不可能找出一個奇完全數的!

討論 (四):

偶完全數是否有無限多個, 至今仍然是個謎? 現今找到的偶完全數 M_n 僅有 33 個。利用電腦代數系統 Maple 的幫助, 可以在30分鐘內計算到首 33 個偶完全數, 其 n 之對應值爲 2、3、5、7、13、17、19、31、61、89、107、127、521、607、1279、2203、2281、3217、4253、4423、9689、9941、11213、19937、21701、23209、44497、86243、110503、132049、216091、756839 及 859433。

參考資料:

1. Y. K. Man, C. K. Leung, S. C. Kong (1997), *Teaching Calculus using computer algebra: a comparative study.*, Proceeding of the ACSA Biennial Conference. Sydney: University of Sydney, Australia.
2. 陳俊生 (1997), 試算表也可以用來學微積分,「數學傳播」, 第81期, 頁45-53。
3. G. Taylor-Russell (1994), *Maple at The University Of North London*, Proceeding of the Maple Summer Workshop and Symposium (ed. R.J. Lopez), 167-172. New York: Birkhauser.
4. 文耀光、梁志強、吳銳堅 (1997),「基礎數學引論」, 香港: 香港教育圖書公司。
5. A. Adler, & J. E. Coury (1995), *The Theory of Numbers* —— A Text & Source book of Problems, London: Jones & Bartlett Publishers.
6. R. E. Crandall (1996), Advanced Topics in Scientific Computing, New York: Springer-Verlag.

- 本文作者現任教於香港教育學院。

聯絡地址:

(1) 文耀光博士, 香港教育學院數學系, 香港新界大埔露屏路10號。

(2) 江紹祥先生, 香港教育學院科學系, 香港新界大埔露屏路10號。

電子郵件:

ykman@math.ied.edu.hk;

sckong@sci.ied.edu.hk

- 讀者如有興趣獲得本文作者設計給予演作之程式 perfect.xls, 歡迎用空郵或電子郵件與作者聯絡。

橢圓切線交點軌跡的探討

羅美音 ● 蘇映竹

壹、研究動機

由基本觀念“橢圓任兩條切線若互相垂直, 則其交點軌跡爲一個圓”加以延伸, 探討不同情況下, 橢圓切線交點的軌跡。

貳、研究目的

一、當橢圓兩切線相交時, 夾角恆保持爲定角 $\theta(0 < \theta < \pi)$, 則其交點軌跡爲何種圖形?

二、過橢圓上兩點 $P(a\cos\phi,\ b\sin\phi)$、$Q(a\cos(\phi+\theta),\ b\sin(\phi+\theta))$, (其中 θ 爲定角, 且 $0<\theta<\pi$), 作兩切線, 則其交點軌跡爲何種圖形?

參、研究器材

電腦、$QBasic$軟體

肆、研究過程

如研究目的所述, 分爲兩種情形討論切線交點的軌跡, 並限制以下討論的橢圓方程式爲 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$, 亦即 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$, 且 $a>b>0$ (參見伍、討論一之 (三))。

一. 兩切線夾定角 θ

提要: (一) 軌跡方程式之推演: 求與橢圓 $b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2$ 相切且交角爲 $\theta(0<\theta<\pi)$ 之兩切線交點軌跡的方程式。

1. 由

$$(x^2-a^2)m^2-2xym+(y^2-b^2)=0 \qquad (*)$$

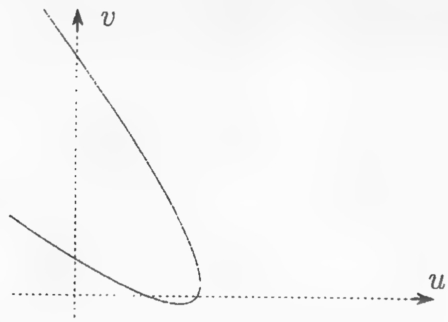
之兩根是交於點 (x,y) 之兩切線的斜率, 以及 $\cot\theta=\pm\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2}$, 得

$$(x^2+y^2-a^2-b^2)^2 = 4\cot^2\theta(b^2x^2+a^2y^2-a^2b^2) \qquad (**)$$

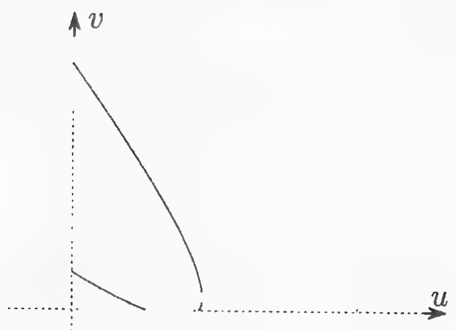
2. 令 $u=x^2$, $v=y^2$, 將$(**)$式化簡, 得

$$u^2+2uv+v^2-2(a^2+b^2+2b^2\cot^2\theta)u -2(a^2+b^2+2a^2\cot^2\theta)v+4a^2b^2\cot^2\theta +(a^2+b^2)^2=0。 \qquad (***)$$

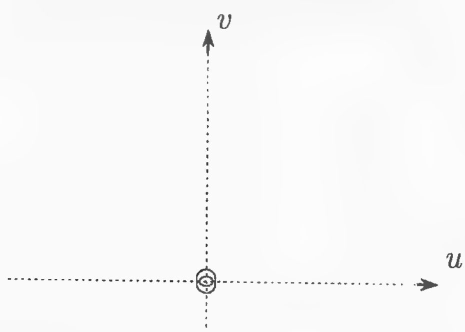
(二) 軌跡圖形之繪製



圖一、$(***)$ 式之圖形。

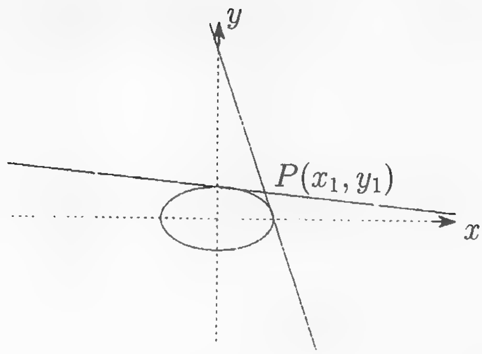


圖二、取圖一之第一象限部分。



圖三、取 $(\sqrt{u},\sqrt{v})$、$(-\sqrt{u},\sqrt{v})$、$(-\sqrt{u},-\sqrt{v})$、$(\sqrt{u},-\sqrt{v})$ 之點, 所成圖形即爲所求。參見伍、討論二。

內容: (一) 軌跡方程式之推演過程:



圖四

1. 設 $y=m_1x+\sqrt{a^2m_1^2+b^2}$ 與 $y=m_2x+\sqrt{a^2m_2^2+b^2}$ 交於 $P(x_1,y_1)$

$$\therefore \begin{cases} y_1=m_1x_1+\sqrt{a^2m_1^2+b^2} \\ y_1=m_2x_1+\sqrt{a^2m_2^2+b^2} \end{cases}$$

m_1,m_2 是 $(y_1-mx_1)^2=a^2m^2+b^2$ 之兩根, 化簡得 $(x_1^2-a^2)m^2-2x_1y_1m+(y_1^2-b^2)=0$ 同理可推得

$$(x^2-a^2)m^2-2xym+(y^2-b^2)=0 \quad (*)$$

之兩根是交於點 (x,y) 之兩切線的斜率。

(1) 若 $x^2-a^2\neq 0$, 令 $(*)$ 式的兩根爲 m_1,m_2 則 $m_1+m_2=\frac{2xy}{x^2-a^2}$, $m_1m_2=\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}$

$$\begin{aligned}\therefore \cot\theta &= \pm\frac{1+m_1m_2}{m_1-m_2} \\ &= \pm\frac{1+m_1m_2}{\sqrt{(m_1+m_2)^2-4m_1m_2}} \\ &= \pm\frac{1+\frac{y^2-b^2}{x^2-a^2}}{\sqrt{(\frac{2xy}{x^2-a^2})^2-\frac{4(y^2-b^2)}{x^2-a^2}}} \\ &= \pm\frac{x^2-a^2+y^2-b^2}{\sqrt{4b^2x^2+4a^2y^2-4a^2b^2}}\end{aligned}$$

$\therefore x^2 - a^2 + y^2 - b^2$
$= \cot\theta \cdot (\pm\sqrt{4b^2x^2 + 4a^2y^2 - 4a^2b^2})$

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\cot^2\theta \qquad (**)$$

(2) 若 $x^2 - a^2 = 0$, 則一條切線無斜率, 而另一切線斜率爲 m, 此時 $(*)$ 式化爲

$$\pm 2aym + (y^2 - b^2) = 0 \quad (\because x = \pm a)$$

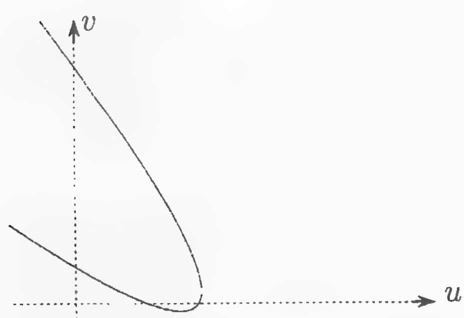
移項後平方 $(y^2 - b^2)^2 = 4a^2y^2m^2$, $\because$ 此時 $m = \cot\theta$, 且 $x^2 - a^2 = 0$, $\therefore$ 可得 $(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)\cot^2\theta$; 亦即 $(**)$ 式。

由 (1),(2) 知 $(**)$ 式爲所求軌跡的方程式。
令 $u = x^2$, $v = y^2$ 代入 $(**)$ 式

$$u^2 + 2uv + v^2 - 2(a^2 + b^2 + 2b^2\cot^2\theta)u - 2(a^2 + b^2 + 2a^2\cot^2\theta)v + 4a^2b^2\cot^2\theta + (a^2 + b^2)^2 = 0$$

將上式定爲 $(***)$ 式 (參見伍、討論一)。

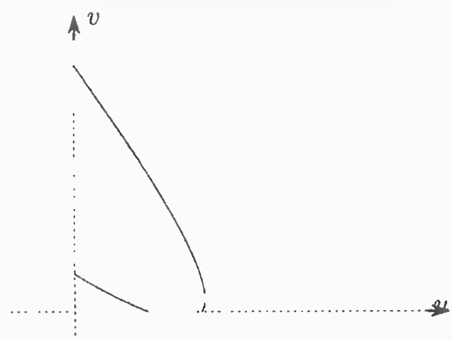
(二) 軌跡圖形之繪製



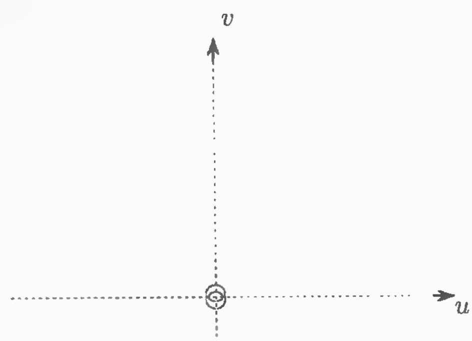
圖一、$(***)$ 式之公式解如下 (令 u 爲 v 之參數)

$$v = -u + (a^2 + b^2 + 2a^2\cot^2\theta) \pm \sqrt{4(\cot^2\theta + 1)a^4\cot^2\theta - 4u(a^2 - b^2)\cot^2\theta}$$

將 u 代入, 可得對應之 v, 作 $(***)$ 式之圖。



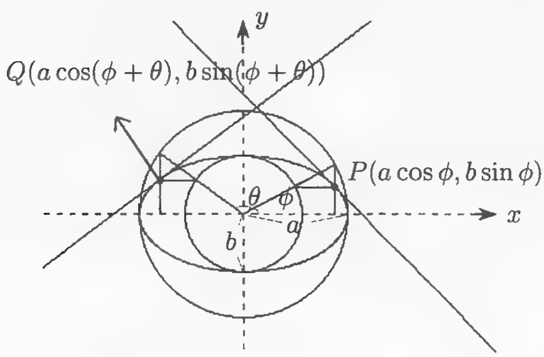
圖二、$\because u = x^2 \geq 0$, $v = y^2 \geq 0$, $\therefore$ 將圖一之圖形取第一象限之部分。



圖三、取 $(\sqrt{u}, \sqrt{v})$, $(-\sqrt{u}, \sqrt{v})$, $(-\sqrt{u}, -\sqrt{v})$, $(\sqrt{u}, -\sqrt{v})$ 之點, 所成圖形即爲所求 (參見伍、討論二)。

二、過橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 上兩點 $P(a\cos\phi, b\sin\phi)$, $Q(a\cos(\phi + \theta), b\sin(\phi + \theta))$ (θ 為定角 $0 < \theta < \pi$) 作兩切線之交點軌跡。

提要: 所得軌跡是一個橢圓 $\frac{x^2}{(\frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}})^2} + \frac{y^2}{(\frac{b}{\cos\frac{\theta}{2}})^2} = 1$



圖五

內容: 如上圖, 過 P 點之切線爲 $\frac{a\cos\phi}{a^2}x+\frac{b\sin\phi}{b^2}y=1$ 化簡得

$$b\cos\phi x+a\sin\phi y=ab \qquad (1)$$

同理, 過 Q 點之切線爲

$$b\cos(\phi+\theta)\cdot x+a\sin(\phi+\theta).\ y=ab \quad (2)$$

(1),(2) 之交點爲

$$x=\frac{\begin{vmatrix} ab & a\sin\phi \\ ab & a\sin(\phi+\theta)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\phi & a\sin\phi \\ b\cos(\phi+\theta) & a\sin(\phi+\theta)\end{vmatrix}}$$

$$=a\times\frac{\sin(\phi+\theta)-\sin\phi}{\sin(\phi+\theta-\phi)}$$

$$=a\times\frac{2(\cos\frac{2\phi+\theta}{2})\cdot\sin\frac{\theta}{2}}{2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$=\frac{a\cdot\cos(\phi+\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

同法

$$y=\frac{\begin{vmatrix} b\cos\phi & ab \\ b\cos(\phi+\theta) & ab\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} b\cos\phi & a\sin\phi \\ b\cos(\phi+\theta) & a\sin(\phi+\theta)\end{vmatrix}}$$

$$=\frac{b\cdot\sin(\phi+\frac{\theta}{2})}{\cos\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore \frac{x\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{a}=\cos(\phi+\frac{\theta}{2}) \qquad (3)$$

$$\frac{y\cdot\cos\frac{\theta}{2}}{b}=\sin(\phi+\frac{\theta}{2}) \qquad (4)$$

$(3)^2+(4)^2$: $\left(\frac{\frac{x}{a}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2+\left(\frac{\frac{y}{b}}{\cos\frac{\theta}{2}}\right)^2=1$ 是一橢圓。

伍、討論

一、$(***)$ 式

(一) 在 $(***)$ 式:

$$u^2+2uv+v^2-2(a^2+b^2+2b^2\cot^2\theta)u$$
$$-2(a^2+b^2+2a^2\cot^2\theta)v$$
$$+4a^2b^2\cot^2\theta+(a^2+b^2)^2=0$$

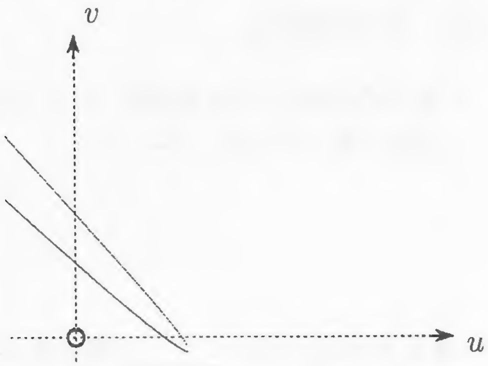
的圖形中, 若將座標軸旋轉 45°, 可得一拋物線如下:

$$\left[u'-\frac{(a^2+b^2)(\cot^2\theta+1)}{\sqrt{2}}\right]^2$$
$$=\sqrt{2}(a^2-b^2)\cot^2\theta$$
$$\cdot\left[v'+\frac{(a^2+b^2)^2\cot^2\theta+2a^4+2b^4}{2\sqrt{2}(a^2-b^2)}\right]$$

(註)

(二) 承 (一), 控制此拋物線開口大小的是 $|\sqrt{2}(a^2-b^2)\cot^2\theta|$, 所以當 θ 越接近 $\frac{\pi}{2}$, 或 a 越接近 b, 此拋物線將越接近一直線 (拋物線之對稱軸), $L: u+v=k>0$, 亦即 $x^2+y^2=k>0$, 因此交點軌跡越接近一個圓, 見圖六。

特款: 當 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 或 $a = b$ 時, u, v 圖形爲一直線, 交點軌跡是一個圓。



圖六

(三) 當 $a > b$ 時, 所得圖形如圖六, 但 $a < b$ 時, 拋物線開口向右下方, 爲了簡化問題, 且因爲可將原來橢圓之長軸旋轉至 x 軸上, 故交點軌跡之形狀並未改變, 所以在本探討中, 皆定義原來之橢圓爲 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 且 $a > b$。

二、圖三所得圖形有內外兩圈, 原因如下:

(一) 兩切線相交時夾角有兩個 (此兩角互補)。

(二) 導出的軌跡方程式, 與夾角有關的只有 $\cot^2\theta$ 項, 因此互補的兩角代入後產生共同的圖形。

陸、結論

一、與橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2 (a > b)$ 相切, 且交角爲 θ 之兩切線, 所作交點軌跡的方程式爲

$$(x^2 + y^2 - a^2 - b^2)^2 = 4\cot^2\theta(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2)$$

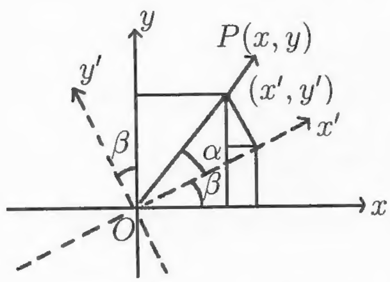
交點軌跡亦是一斜拋物線 $(***)$ 之 u, v 坐標開平方根之後所得的圖形。

二、過橢圓 $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ 上兩點 $P(a\cos\phi, b\sin\phi)$, $Q(a\cos(\phi+\theta), b\sin(\phi+\theta))$, 作兩切線, 則其交點軌跡爲一個橢圓:

$$\left(\frac{x}{\frac{a}{\cos\frac{\theta}{2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\frac{b}{\cos\frac{\theta}{2}}}\right)^2 = 1$$

註: 所謂“旋轉”係指坐標軸繞原點旋轉之意, 如下圖, 將 x, y 軸繞原點 O 旋轉一角 β 至 x', y' 之位置, 則 x', y' 軸亦可建立一新的坐標系, 設單位長不變, 則對坐標平面上任一點 P, 其原坐標 (x, y) 與新坐標 (x', y') 有如下之關係:

$$\begin{cases} x = x'\cos\beta - y'\sin\beta \\ y = x'\sin\beta + y'\cos\beta \end{cases}$$



其次可藉旋轉將二次錐線 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ 的“xy”項消掉, 步驟如下: 設旋轉的角度 β (通常 $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$), 原坐標 (x, y), 新坐標 (x', y'), 則由上述公式:

$$\begin{cases} x = x'\cos\beta - y'\sin\beta \\ y = x'\sin\beta + y'\cos\beta \end{cases}$$

代入錐線中, 整理, 並利用二倍角公式可得:

$$\begin{aligned}&(A\cos^2\beta+\frac{B}{2}\sin 2\beta+C\sin^2\beta)x'^2\\&+[(C-A)\sin 2\beta+B\cos 2\beta]x'y'\\&+(A\sin^2\beta-\frac{B}{2}\sin 2\beta+C\cos^2\beta)y'^2\\&+(D\cos\beta+E\sin\beta)x'\\&+(-D\sin\beta+E\cos\beta)y'+F=0\end{aligned}$$

上式 $x'y'$ 之係數爲零的充要條件爲 $(C-A)\sin 2\beta+B\cos 2\beta=0$ 即 $\cot 2\beta=\frac{A-C}{B}$, 因此只要取旋轉的角 β 滿足 $\cot 2\beta=\frac{A-C}{B}$, 就能將方程式中的第二項消掉。

柒、參考資料

1. 聽笑話學數學, 洪鋕雄編著, 77年8月協進圖書有限公司出版, 113~115頁。

—羅美音就讀於國立成功大學建築學系一年級, 蘇映竹就讀於嘉義女中三年級—

周鴻經先生事略

周鴻經綸閣先生，生於民國前十年，歿於民國四十六年，享年五十有六。先生天性淳厚，篤於孝友，英年績學，才華卓著。歷任中央大學數學系主任、訓導長、教務長、校長及中央研究院總幹事兼數學研究所所長。畢生從事數學研究及教育工作，不遺餘力。

先生早年留學英國，於抗戰時期毅然返國，共赴國難。戰時艱苦，衣食為勞，而先生仍能創著不絕，年有新猷，於富氏級數方面先後發表論文二十二篇，為當時國內年輕數學家之典範。

先生不僅對數學研究有卓異造詣，其於教育行政亦有建樹。多年執教，桃李滿天下，受其薰陶者，莫不眷眷於懷。

先生於努力研究之餘，曾在各報章雜誌發表諸多數學教育文章，並編著中學教科書多冊為當時中學普遍採用，對於日後數學教育之改革有深遠之影響。

中央研究院周鴻經獎學金章程

第一條　中央研究院為紀念數學研究所周故所長鴻經，鼓勵有志研習數學之學生，設置數學獎學金。

第二條　本獎學金暫定十二名，每名每年暫定新台幣貳萬元。

第三條　凡公私立大學或學院之數學系三年級以上學生或數學研究所之研究生數學成績優異者均可申請。

第四條　申請本獎學金之學生應於每年十一月十五日前，由所屬院校將下列各件彙送本院：

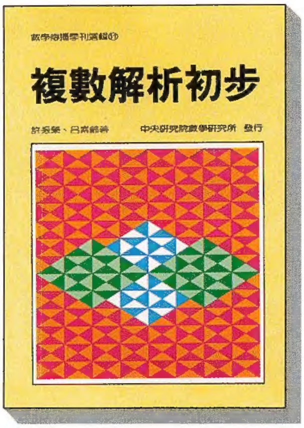
(1)志向說明書：

(2)在學各學年之成績單（一年級研究生須繳大學四年之成績單）

(3)數學系、所之教授二人以上之推薦書。

第五條　本獎學金之審核由本院數學研究所組織委員會行之，必要時得舉行面試，其結果於每年十二月十五日發表。獎學金於十二月及三月各付給總數之半。

第六條　本章程經院務會議通過院長核定後施行。





有了"數學傳播季刊選輯"
讓您大開眼界！

- ■數學傳播季刊創刊十年的里程碑
- ■由數十位專家共同執筆
- ■數學傳播季刊編輯部精心編輯
- ■適合高中以上程度閱讀

數學傳播季刊選輯

台北市南港區研究院路二段128號（電話：2785-1211轉382）
郵政劃撥：中央研究院數學研究所　帳號：0100434-8